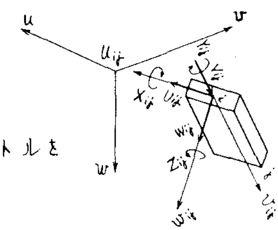
I-100 任意形主体ラーメンの解法

宮地鉄工　正員　小池修二
〃　○後藤茂夫

空間に任意の位置を占める部材に変形法を適用し、任意形立体ラーメンの一解法を示したものである。まず、空間部材の材端力、材端モーメントを部材軸と弾性主軸に関する材端変位で表わし、これらの部材座標の、空間に固定された共通の直交座標に対する方向余弦を行列として取扱い、材端力、材端変位を空間座標系えと変換し、節点に集まる材端力、材端モーメントの釣合いより行列方程式を導いた。　図のように、空間座標を $(u\ v\ w)$ 部材 ij の i 点における部材軸と弾性主軸により構成される部材座標軸を $(U_{ij}\ V_{ij}\ W_{ij})$、いづれも右手系にとる。



図の i 点の部材座標に関する端断面力、変形量の列ベクトルを

材端モーメント　$M_{ij} = [X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}]^*$

材端力　$Q_{ij} = [U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}]^*$

回転変位　$r_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^*$　　＊：転置記号

移動量　$d_{ij} = [u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}]^*$

と表わし、これらの空間座標への投影成分を M'_{ij}, Q'_{ij}, r_i, d_i とする。

こゝで部材断面力は、次のように表わすことができる。

$$M_{ij} = \mathfrak{k}_{ij}\,r_{ij} + \bar{\mathfrak{k}}_{ij}\,r_{ji} + \mathfrak{s}_{ij}(d_{ij} - d_{ji}) - M_{oij} \qquad \text{------}(1)$$

$$Q_{ij} = \mathfrak{s}^*_{ij}(r_{ij} + r_{ji}) + \mathfrak{q}_{ij}(d_{ij} - d_{ji}) - Q_{oij} \qquad \text{------}(2)$$

たゞし、

$$\mathfrak{k}_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}\begin{bmatrix} 4EI_{uij} & & \\ & GJ_{ij} & \\ & & 4EI_{wij} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathfrak{k}}_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}\begin{bmatrix} 2EI_{uij} & & \\ & -GJ_{ij} & \\ & & 2EI_{wij} \end{bmatrix} \quad \mathfrak{s}_{ij} = \frac{6E}{l_{ij}^2}\begin{bmatrix} & & I_{uij} \\ & 0 & \\ -I_{wij} & & \end{bmatrix} \quad \mathfrak{q}_{ij} = \frac{E}{l_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12I_{wij} & & \\ & A_{ij}\,l_{ij}^2 & \\ & & 12I_{uij} \end{bmatrix}$$

M_{oi}, Q_{oi}　：　部材上の荷重による荷重項および温度荷重項も含む

また、ij 部材座標の空間座標に対する方向余弦よりなる行列 $D_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & \alpha'_{ij} & \alpha''_{ij} \\ \beta_{ij} & \beta'_{ij} & \beta''_{ij} \\ \gamma_{ij} & \gamma'_{ij} & \gamma''_{ij} \end{bmatrix}$ を定義する。D_{ij} の第2列要素は ij 部材軸の方向余弦で、ij の座標値より決定され、あと一つの要素が決まれば、他は $D^*_{ij}\,D_{ij} = I$：単位行列より計算できる。なお、ji 座標系を ij 座標系が W_{ij} のまわりに $180°$ 回転したものと考えれば D_{ji} は D_{ij} の第1列と第2列の符号をかえたものに等しくなる。

この D_{ij} を左から部材座標に関する諸量に乗じて空間座標系へ、また D^*_{ij} を用いて逆の操作もできる。したがつて、(1)、(2)を空間座標へ変換すれば、

$$M'_{ij} = D_{ij}\,\mathfrak{k}_{ij}\,D^*_{ij}\,r_i + D_{ij}\,\bar{\mathfrak{k}}_{ij}\,D^*_{ij}\,r_i + D_{ij}\,\mathfrak{s}_{ij}\,D^*_{ij}(d_i - d_i) - M'_{oij} \qquad \text{------}(3)$$

$$Q'_{ij} = D_{ij}\,\mathfrak{s}^*_{ij}\,D^*_{ij}(r_i + r_i) + D_{ij}\,\mathfrak{q}_{ij}\,D^*_{ij}(d_i - d_i) - Q'_{oij} \qquad \text{------}(4)$$

こゝで $A_{ij} = D_{ij}\,\mathfrak{k}_{ij}\,D^*_{ij}$　$A_{ij} = D_{ij}\,A_{ij}\,D^*_{ij}$　$B_{ij} = D_{ij}\,\mathfrak{s}_{ij}\,D^*_{ij}$　$C_{ij} = D_{ij}\,\mathfrak{q}_{ij}\,D^*_{ij}$　とおけば

$$M'_{ij} = A_{ij}\,r_i + A_{ij}\,r_i + B_{ij}(d_i - d_j) - M'_{oij} \qquad \text{------}(5)$$

$$Q'_{ij} = B^*_{ij}(r_i - r_j) + C_{ij}(d_i - d_j) - Q'_{oij} \qquad \text{------}(6)$$

節点に働く外力としてのモーメントと力の空間座標に関する成分の列ベクトルを $\bar{M}_i$，$\bar{Q}_i$ とすれば $\sum_j M'_{ij} = \bar{M}_i$，$\sum_j Q'_{ij} = \bar{Q}_i$ より $i = 1, 2, \cdots\cdots n$ として全節点における釣あい方程式を行列表示すれば

$$\begin{bmatrix} \Sigma A_{1j} & & \bar{A}_{ik} \\ & \Sigma A_{2j} & \\ \bar{A}_{ki} & & \Sigma A_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma B_{1j} & & -B_{ik} \\ & \Sigma B_{2j} & \\ -B_{ki} & & \Sigma B_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1 + \Sigma M_{01j} \\ \bar{M}_2 + \Sigma M_{02j} \\ \cdots\cdots \\ \bar{M}_n + \Sigma M_{0nj} \end{bmatrix} \quad \text{-----------} (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma B^*_{1j} & & B^*_{ik} \\ & \Sigma B^*_{2j} & \\ B^*_{ki} & & \Sigma B^*_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma C_{1j} & & -C_{ik} \\ & \Sigma C_{2j} & \\ -C_{ki} & & \Sigma C_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 + \Sigma Q_{01j} \\ \bar{Q}_2 + \Sigma Q_{02j} \\ \cdots\cdots \\ \bar{Q}_n + \Sigma Q_{0nj} \end{bmatrix} \quad \text{-----------} (8)$$

となる。非対角要素，たとえば $\bar{A}_{ik}$ は i 行 k 列の要素を表わしている。ここで D，T，Δ，ℓ の性質より，$B_{ik} = -B_{ki}$，$B^*_{ki} = -B^*_{ik}$　$\bar{A}_{ik} = \bar{A}_{ki}$　$C_{ik} = C_{ki}$　などがたしかめられる。

したがって，(7)，(8) は次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} \quad \text{-------} (9)$$

あるいは，もっと簡単に $K\delta = L$ -------- (9')

この(9)式は，任意形立体ラーメンの荷重と節点の変形量との関係を表わす一般式である。しかしこの式には，支点の条件は含まれていない。したがって，これが成立するためには，右辺の荷重群は荷重どうしでつりあっていることが必要である。また外力として荷重群がつりあっていても，左辺の係数行列の逆行列を求めて変位を計算することはできない。これは，支点の条件の入らない係数行列のデターミナントは常に0となるからである。つぎに支点条件の一般的な挿入法についてのべる。

いま，ある点の支点の拘束により，変形ベクトル δ の才 k 行が常に 0 であるとすれば，(9') の K の才 k 行，および才 k 列の対角要素を 1，その他の非対角要素を 0 とおいたものを K' とし，単位行列の才 k 行の単位要素を 0 とおきかえたものを I' とおけば，支点条件を含んだ変形方程式は，(9')の代りに

$$K'\delta = I'L \quad \text{-----------} (10)$$

と表わすことができる。このようにして支点の条件が（外的に安定であることが必要）入った K' が作成されれば，$\delta = K'^{-1} I'L$ ----------- (11)　として全節点の変形量が計算される。

こうして δ が求まれば，各断面力は

$$M_{ij} = D^*_{ij} \left\{ A_{ij} r_i + \bar{A}_{ij} r_j + B_{ij} (d_i - d_j) \right\} - M_{0ij} \quad \text{--------} (12)$$

$$Q_{ij} = D^*_{ij} \left\{ B^*_{ij} (r_i + r_j) + C_{ij} (d_i - d_j) \right\} - Q_{0ij} \quad \text{--------} (13)$$

より計算することができる。