1-96 ランダム荷重を受ける構造物の静的挙動の解析

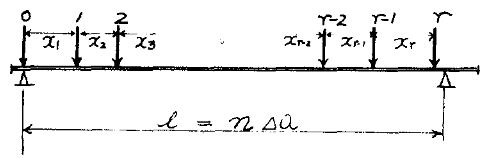
名古屋大学工学部　正員　中川建治

〔I〕分布関数

交通量観測によって，車頭間隔がPoisson分布にしたがうことが知られている。ここでは，車両による荷重を，単位の集中荷重とみなし，図-1に示すように，長さの単位Δaとして，集中荷重の間隔x_iが，パラメーターνのPoisson分布にしたがう場合を対象にする。

$$P\{x_i = k_i \Delta a\} = \frac{\nu^{k_i}}{k_i!} e^{-\nu}$$

$$n \Delta a = l$$



〔図-1〕

という条件のもとに，長さlの梁にr個の荷重が載荷する確率$p(r)$は，次のようにして与えられる。なお，区間lの左端は，任意の集中荷重の位置にとり，この荷重は無視する。他方，右端の荷重は計算に入れる。

$$p(r) = P\left\{\sum_{i=1}^{r} k_i \leqq n < \sum_{i=1}^{r+1} k_i\right\}$$

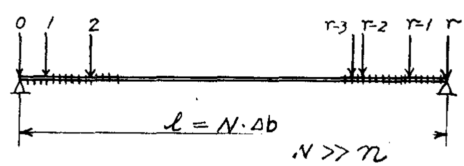
$$= \sum_{\beta=0}^{n}\sum_{k=\beta+1}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \cdot \frac{(\nu r)^{n-\beta}}{(n-\beta)!} e^{-\nu r}$$

$$= e^{-\nu r}\sum_{\beta=0}^{n}\frac{(\nu r)^\beta}{\beta!} - e^{-\nu(r+1)}\sum_{\beta=0}^{n}\frac{\{\nu(r+1)\}^\beta}{\beta!}$$

$$= \frac{\nu^{n+1}}{n!}\int_r^{r+1} e^{-\nu x} x^n dx$$

$$\bar{r} \fallingdotseq \int_0^\infty r\, p(r)\, dr = \frac{n+1}{\nu}$$

$$\sigma^2 \fallingdotseq \frac{n+1}{\nu^2}$$



〔図-2〕

〔II〕梁に載荷するランダム荷重の影響

長さlの梁にr個の単位集中荷重が配列しているという条件のもとに，梁のタワミや，曲げモーメントの影響を求める。曲げモーメント，あるいは，タワミの影響線を一般に，$W(x) = A(x/l)^3 + B(x/l)^2 + C(x/l) + D$

として表わす。長さlの区間にr個載荷しているという条件のもとにおける$W(x)$の平均値，および，分散値を，$m(r)$，$V(r)$とする。

1）等間隔配列

r個の荷重が，区間lに等間隔で配列する場合を考える。間隔がPoisson分布にしたがっている場合に，最も生起し易い配列は，等間隔配列である。

$$m_1(r) = \sum_{k=1}^{r}\left\{A\left(\frac{k}{r}\right)^3 + B\left(\frac{k}{r}\right)^2 + C\left(\frac{k}{r}\right) + D\right\}$$

$$= r\left(\frac{A}{4} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2} + D\right) + \frac{1}{2}(A+B+C) + \frac{1}{r}\left(\frac{A}{4} + \frac{B}{6}\right)$$

$$V_1(r) = 0$$

2) 一様分布.

図−2のように、区間lをN等分($N \gg r$)して、荷重はすべての点へ等しい確率で載荷する。すなわち、第k番目の点へ載荷する確率はr/Nであり、同一点へ同時に2個以上載荷しないものとする。

$$m_2(r)=r\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{3}+\frac{C}{2}+D\right)+\frac{r}{2N}(A+B+C)+\frac{r}{N^2}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{6}\right)$$

$$V_2(r)=\frac{r(N-r)}{N-1}\left\{\frac{9}{112}A^2+\frac{1}{6}AB+\frac{4}{45}B^2+\frac{1}{6}BC+\frac{1}{12}C^2+\frac{3}{20}CA.\right\}$$

3) Poisson分布

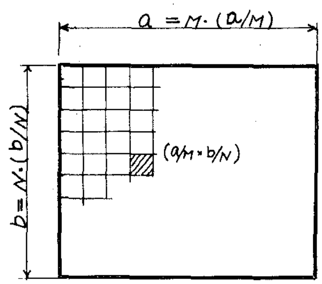
図−1において、第r番目の荷重が、区間lの右端に位置していて、内部の$r-1$個の荷重が、それぞれの間隔をPoisson分布にしたがう変数として配列する場合を考える。

$$m_3(r)=r\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{3}+\frac{C}{2}+D\right)+\frac{1}{2}(A+B+C)+\frac{1}{r}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{6}\right)-\frac{(r+1)}{4nr}\{(7r+5)A-4(r-1)B\}+\frac{1}{2n^2}(r+1)A$$

[III] 四辺単純支持板にランダム荷重が載荷する場合

図−3に示すような四辺単純支持矩形板($a\times b$)を、それぞれの辺を、等間隔M, N区間に分割して、($a/M\times b/N$)のCellを$M\times N$個仮想する。荷重強度$p=1$で、($a/M\times b/N$)の矩形分布荷重が、任意のCellに1つづつ、r個配列した場合のタワミ、曲げモーメントの平均値$E(r)$と分散値$V(r)$を求める。

第$(i\cdot j)$のCellに1ケ載荷した場合の影響$U(x,y,i,j)$は次のようになる。



[図−3]

$$U(xy\cdot ij)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q(m\cdot n)\sin\frac{m\pi}{2M}\sin\frac{n\pi}{2N}\sin\frac{m\pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

ここで、Cell(i,j)に載荷する確率はr/MNであり、$(i,j)\cdot(k,l)$に同時に載荷する確率は、$r(r-1)/(MN-1)MN$となる。したがって、$E(r)$, $V(r)$は、次のようになる。

$$E(r)=\frac{r}{MN}\sum_m\sum_n Q(m\cdot n)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=\frac{r}{MN}H_2(x\cdot y)$$

$$\begin{aligned}V(r)&=\frac{r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)\sum\sum Q^2(m\cdot n)\sin^2\frac{m\pi}{2M}\sin^2\frac{n\pi}{2N}\sin^2\frac{m\pi}{a}x\sin^2\frac{n\pi}{b}y\\&\quad-\frac{(MN-r)}{(MN)^2(MN-1)}\left\{\sum_{1,3,5}\sum Q(m\cdot n)\sin\frac{m\pi}{a}\sin\frac{n\pi}{b}y\right\}^2\\&=\frac{r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)H_1(xy)-\frac{MN-r}{(MN)^2(MN-1)}\{H_2(xy)\}^2\end{aligned}$$

ここで、$r=\beta MN$, $MN\gg 1$とすれば、

$E(r)=\beta H_2(xy)$

$V(r)\fallingdotseq\frac{\beta(1-\beta)}{4}MN\,H_1(xy)$

とする。

$a=b$の場合の、タワミ、曲げモーメントM_x, M_yに対する$H_1(xy)$を、板中央点で計算して、表−1に示す。

表−1 $H_1(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2})$

M	N	タワミW $\times(10^{-8}a^4/D)$	M_x $\times(10^{-6}a^2)$	M_y $\times(10^{-6}a^2)$
5	5	395.64	706.95	706.95
10	10	104.00	191.77	191.77
10	20	52.33	96.19	96.64
20	20	26.33	48.71	48.71
50	50	4.23	7.84	7.84