

I-78 テーバーの着しくついているアーチの応力変形の解析

東京大学 工学部 正員 奥村敏恵
名古屋工業大学 正員 松浦 聖

まえがき 2本のアーチが、お互いに各支桌では一定の間隔があるが、支向中央では、一体となつてゐるような(図-1, 図-2参照)テーバーのついた、いわゆるバスケットハンドル形式の構造物に対し、そのテーバーが、はる橋梁構造物の応力変形その他坐屈振動性状等を与える影響を調べるのは興味ある問題であらう。こゝでは問題を応力変形に限定し、かつその解析方法をまず述べることにする。すなわち case I として図-1 に示めすような任意点に線荷重が作用する場合で、この荷重はアーチに対しては吊桁算によつて、各アーチの面内荷重 P として(図-3参照)作用するものと考えられる。(図-19参照)図-3における P は床組構造が受け持つこととなる。すなわちアーチの任意断面の応力変形の影響線または応力図変位図を求める計算を示めす。つぎに、case II として図-2 に示めすような例えば風荷重のごとき水平(橋軸に対しては直角)横荷重を受ける場合の各部材断面の応力変形の計算を示めすことにする。なおアーチは円弧アーチで、その断面は円形パイプとし、支桌はアーチ面内の回転のみ自由の場合を考えることにする。



図-1 線荷重状態, case I



図-2 水平横荷重状態, case II

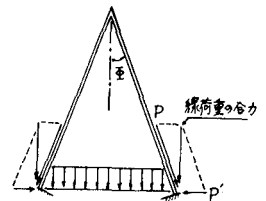


図-3 アーチの横断面図

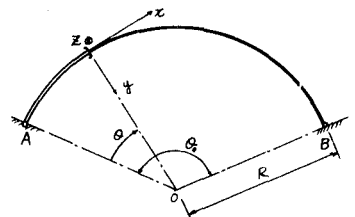


図-4 アーチの形状図

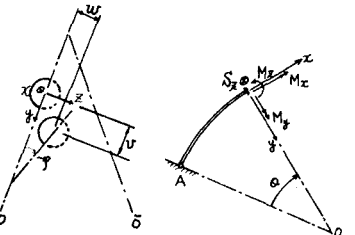


図-5 変位の符号

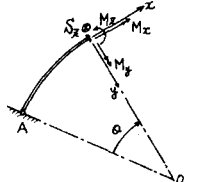


図-6 断面力の符号

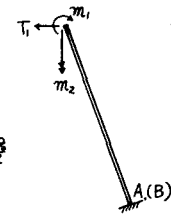


図-7 case I に対して

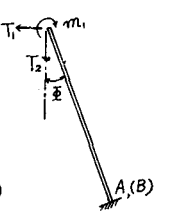


図-8 case II に対して

1. アーチの座標変位断面力の符号 アーチの座標系は図-4のごとくとり、変位断面力の符号(正)は図-5, 図-6のごとくとする。なおネジリ回転 φ はネジリモーメント M_x の正の方向と同じにとる。

2. 応力-歪関係式 以上のように応力と変位を定義するとよく知られた、つぎのような関係式を得る。

$$M_x = GJ_r \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds} \right), M_y = EI_y \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{\varphi}{R} \right), M_z = EI_z \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{\varphi}{R} \right), N = EA \left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{R} \right) \quad (1)$$

3. アーチ中央の剛節構造に関する考慮 構造物の対称性、および載荷状態により、中央で、図-7, 8 のような応力が考えられる。

4. アーチの釣合条件式

$$\text{case II, } \text{アーチ AB, } \left. \begin{aligned} S_y &= \frac{dN}{ds} + R p \sin \theta \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta - \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right), \frac{dS_x}{ds} = -p \cos \theta R, \\ \frac{dS_y}{ds} + N &= R p \sin \theta \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right), S_y = \frac{1}{R} \frac{dM_z}{ds}, M_y = \frac{dM_x}{ds}, S_x = \frac{1}{R} \frac{dM_y}{ds} + \frac{M_z}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

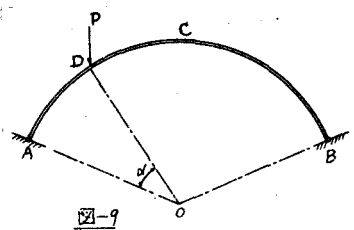
2) アーチ $\overline{AB}$, (2)式で $p = -q$ とすればよい。

case I, (2)式の荷重項を零とおけばよい。

5. アーチの面内変形に対する弾性曲線方程式の解 (1)と(2)等からの連立方程式の解は(4)等となる。

$$\text{case II, } \text{アーチ AB, } \left. \begin{aligned} F_1 \frac{d^4 u}{ds^4} - F_1 \frac{d^3 v}{ds^3} + F_2 \frac{d^2 u}{ds^2} + F_2 \frac{d^2 v}{ds^2} &= -R p \sin \theta \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta - \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \\ -F_2 \frac{d^3 u}{ds^3} - F_2 \frac{d^3 v}{ds^3} + F_1 \frac{d^2 u}{ds^2} - F_1 \frac{d^2 v}{ds^2} &= +R p \sin \theta \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v &= (C_1 + C_2 \theta) \cos \theta + (C_3 + C_4 \theta) \sin \theta + C_5 + \frac{F_3}{8} \theta^2 \sin \theta + \frac{F_4}{8} \theta^2 \cos \theta \\ u &= \frac{F_2}{F_1} \left\{ -2C_2 \cos \theta - 2C_4 \sin \theta + \frac{1}{4} (F_3 \cos \theta - F_4 \sin \theta) - \frac{1}{4} \theta (F_3 \sin \theta + F_4 \cos \theta) \right. \\ &\quad + C_1 \sin \theta (\cos \theta + \theta \sin \theta) - C_3 \cos \theta + C_4 (\sin \theta - \theta \cos \theta) + C_5 \theta + C_6 \\ &\quad \left. + \frac{F_3}{8} [2\theta \sin \theta - (\theta^2 - 2) \cos \theta] + \frac{F_4}{8} [2\theta \cos \theta + (\theta^2 - 2) \sin \theta] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$



2) アーチ $\bar{A}\bar{B}$ に対する $\bar{u}, \bar{v}$ は(4)で荷重の項を $p = -q$ とおけばよい。

case I, その u, v は(4)式で荷重項を零にすればよい。

6. 断面力について

5. で求めた変位を(1)式に代入すれば S_y, N, M_x 等は決定できる。

7. 積分常数の決定

境界条件として、それぞれつぎのように考えられる。

case I, つぎの応力変位について I, II, III は、それぞれ図-9における AD, DC, CB 部分における値を示している。未知数18に対し、つぎの18の条件式から決定される。

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{\theta=0} &= (v_1)_{\theta=0} = (M_1)_{\theta=0} = (u_2)_{\theta=0} = (v_2)_{\theta=0} = (M_2)_{\theta=0} = 0, (u_1)_{\theta=\pi/2} = (u_2)_{\theta=\pi/2}, (v_1)_{\theta=\pi/2} = (v_2)_{\theta=\pi/2}, \left(\frac{dv_1}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} = \left(\frac{dv_2}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2}, \\ (N_1)_{\theta=\pi/2} + P \sin \left(\frac{\theta}{2} - \pi \right) &= (N_2)_{\theta=\pi/2}, (M_2)_{\theta=\pi/2} = (M_1)_{\theta=\pi/2}, (u_2)_{\theta=\pi/2} = (u_1)_{\theta=\pi/2}, (v_2)_{\theta=\pi/2} = (v_1)_{\theta=\pi/2}, \left(\frac{dv_1}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} = \left(\frac{dv_2}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2}, (S_y)_{\theta=\pi/2} = -T_1 \sin \pi + (S_y)_{\theta=\pi/2} \\ (N_2)_{\theta=\pi/2} &= (N_1)_{\theta=\pi/2}, (M_2)_{\theta=\pi/2} = (M_1)_{\theta=\pi/2}, (u_2)_{\theta=\pi/2} = (u_1)_{\theta=\pi/2}, (v_2)_{\theta=\pi/2} = (v_1)_{\theta=\pi/2}, \left(\frac{dv_1}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} = \left(\frac{dv_2}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

case II, 1) アーチ AB

$$(v_1)_{\theta=0} = (u_1)_{\theta=0} = (M_1)_{\theta=0} = \left(\frac{dv_1}{d\theta} \right)_{\theta=0} = (u_2)_{\theta=\pi/2} = 0, -P \sin \pi R \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} T_1 \sin \pi + \frac{1}{2} T_2 \cos \pi + (N_1)_{\theta=0} \sin \frac{\theta}{2} - (S_y)_{\theta=0} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad (6)$$

2) アーチ $\bar{A}\bar{B}$ (6)式で $p = -q, T_2 = -T_2$ とおきかえればよい。

8. アーチの面に垂直方向の変形に対する弾性曲線方程式の解

(1), (2)式等から求められる、つぎの

連立方程式等を解けばよい。ここで $F_3 = \frac{qR^2}{R}, F_4 = \frac{EI}{R^2}$ とおく。

$$\text{case II, 1) アーチ AB} \quad F_3 \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{F_4}{R} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{F_4}{R} \frac{d^2 v}{ds^2} - F_4 q = 0, -\frac{F_4}{R} \frac{d^2 w}{ds^2} + F_4 \frac{d^2 y}{ds^2} + F_3 \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{F_3}{R} \frac{d^2 w}{ds^2} = -p \cos \pi R^2 \quad (7)$$

$$\therefore y = (C_1 + C_2 \theta) \cos \theta + (C_3 + C_4 \theta) \sin \theta - \frac{F_3 + F_4}{F_3 F_4} \cos \pi R^2 p, w = -C_1 R \cos \theta + C_2 R \{ -\theta \cos \theta + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \sin \theta \} - C_3 R \sin \theta - C_4 R \{ \theta \sin \theta + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \cos \theta \} \quad (8)$$

2) アーチ $\bar{A}\bar{B}$ 変位 $\bar{y}, \bar{w}$ は(8)式の荷重の項で $p = -q$ とおけばよい。 $-\frac{\cos \pi R^2 p}{2F_3} \theta^2 + C_1 \theta + C_6$

case I, その y, w は(8)式で荷重の項を零とおけばよい。

なお、 S_x, M_x, M_y 等は(1)式を使えば決定できる。

9. 積分常数の決定

case I, 応力変位のこゝでの I, II は図-9の AC, CB 部分での、その値を示す。

$$(w_1)_{\theta=0} = (v_1)_{\theta=0} = \left(\frac{dw_1}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0, (w_1)_{\theta=\pi/2} = (w_2)_{\theta=\pi/2}, (v_1)_{\theta=\pi/2} = (v_2)_{\theta=\pi/2}, \left(\frac{dw_1}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} = \left(\frac{dw_2}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} \quad (9)$$

$$\text{case II, 1) アーチ AB} \quad \left. \begin{aligned} (w)_{\theta=0} &= (v)_{\theta=0} = \left(\frac{dw}{d\theta} \right)_{\theta=0} = \left(\frac{dv}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0, (w)_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2} T_1 \cos \pi + \frac{1}{2} T_2 \sin \pi + p \cos \pi R \frac{\theta}{2} \\ (M_y)_{\theta=0} \sin \frac{\theta}{2} &+ (M_x)_{\theta=0} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} R T_1 \cos \pi - \frac{1}{2} R T_2 \sin \pi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2) アーチ $\bar{A}\bar{B}$ 式(10)で $p = -q, T_2 = -T_2$ とおきかえればよい。

10. m_1, m_2, T_1, T_2 の決定

以上の求められた応力変位を表わす式に含まれている積分常数の中の未知量 m_1, m_2, T_1, T_2 はつぎの変形の連続条件を考慮すれば決定される。

$$\text{case I, } (y)_{\theta=\pi/2} = 0, \left(\frac{dw}{d\theta} \right)_{\theta=\pi/2} = 0, (w)_{\theta=\pi/2} = \tan \pi (v)_{\theta=\pi/2} \quad (11)$$

$$\text{case II, } (y)_{\theta=\pi/2} + (y)_{\theta=\pi/2} = 0, (w)_{\theta=\pi/2} + (w)_{\theta=\pi/2} - \tan \pi (v)_{\theta=\pi/2} + (v)_{\theta=\pi/2}, [(w)_{\theta=\pi/2} - (w)_{\theta=\pi/2}] \tan \pi = (v)_{\theta=\pi/2} - (v)_{\theta=\pi/2} \quad (12)$$

11. 数値計算の一例

$R = 50m$, スパン $60m$, パイプ外径 $50cm$, 肉厚 $1cm$, スパン中央鉛直に P 載荷,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.059P, C_2 = 0.051P, C_3 = 0.00912P + 0.00478T_1, C_4 = 0.00836P - 0.00428T_1, C_5 = 0.0780P - 0.0225T_1, C_6 = 0.0560P + 0.0051T_1, C_7 = 0.1153P - 0.00404T_1, C_8 = 2.26 \cdot 10^{-3} m_1 - 1.88 \cdot 10^{-4} P - 1.09 \cdot 10^{-4} T_1 \\ C_9 &= 0.293 \cdot 10^{-3} m_1 + 0.1920 \cdot 10^{-4} P + 1.33 \cdot 10^{-4} T_1, C_{10} = 1.919 \cdot 10^{-3} m_1 - 0.0711 \cdot 10^{-4} P - 5.054 \cdot 10^{-5} T_1, C_{11} = 0.083 \cdot 10^{-3} P + 0.006 \cdot 10^{-4} T_1, C_{12} = 1.13 \cdot 10^{-3} m_1 - 0.0027 \cdot 10^{-4} P - 0.0057 T_1, C_{13} = 0, m_1 = 1.138 P, T_1 = 0.1178 P \end{aligned}$$

文献 岡本 三, 軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける円形曲り梁の研究, 土木学会誌 35 巻 3 号, 昭和 18 年 3 月