I-65 ニールセン系構造物の一解法

宮地鉄工　正員 後藤茂夫
〃　〃 ○松本陽太郎

本理論は、曲げ剛さを有する弦材の節点が、軸力部材である腹材により、任意に結合された形式、すなわち、一般ニールセン系構造の一解法を示したものである。一般に、このような高次不静定構造物の解法は変形法によるのが便利であることはいうまでもない。変形法では一節点につき、水平、垂直、回転の3ケの未知変位を取扱うが本理論では、腹材の曲げ剛さがないことに着目し、弦材節点に関する3連モーメント式を用い、回転変位の式に替えた。したがって、出発点の未知量は、節点の水平、垂直変位および曲げモーメントであり、曲げモーメントは、3連モーメント式より水平垂直変位におきかえられ、結局1節点につき2ケづつの未知変位を考えることになる。なお、筆者らは、すでに、曲げおよび捩り剛さを持つ部材よりなる任意形平面骨組構造のプログラムを完成しているが本解法は、その適用範囲を若干せばめ、演算の高速化をはかるものである。

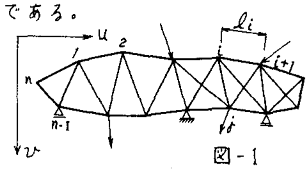

図-1

図の i 点の変位の u, v 成分を x_i, y_i とすれば、3連モーメント式は

$$t_{i-1}M_{i-1}+2(t_{i-1}+t_i)M_i+t_iM_{i+1}=\beta'_{i+1}x_{i-1}-(\beta'_{i-1}+\beta'_i)x_i+\beta'_i x_{i+1}$$
$$-\alpha'_{i-1}y_{i-1}+(\alpha'_{i-1}+\alpha'_i)y_i+\alpha'_i y_{i+1} \quad \cdots\cdots(1)$$

となる。こゝで　$\alpha_i=(u_{i+1}-u_i)/l_i$　$\beta_i=(v_{i+1}-v_i)/l_i$　$\alpha'_i=\alpha_i/l_i$　$\beta'_i=\beta_i/l_i$　$t_i=l_i/6EI_i$

また i～$i+1$ 部材のせん断力、軸力は、$Q_i=(M_{i+1}-M_i)/l_i$, $N_i=F_i\{\alpha_i(x_{i+1}-x_i)+\beta(y_{i+1}-y_i)-\varepsilon t l_i\}$ $\cdots\cdots(2)$

たゞし、$F_i=EA_i/l_i$, t：上昇温度　ε：線膨脹係数

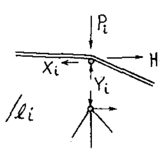

図-2

図のように、節点 i の荷重を P_i, H_i, 腹材より弦材節点に及ぼす水平、垂直力を X_i, Y_i とすれば、$a_i=F_i\alpha_i^2/l_i$, $b_i=F_i\beta_i^2/l_i$, $c_i=F_i\alpha_i\beta_i/l_i$ とおいて、次式が得られる。たゞし温度の項は一応省略する。

$$H_i-X_i=-a_{i-1}x_{i-1}+(a_{i-1}+a_i)x_i-a_ix_{i+1}-c_{i-1}y_{i-1}+(c_{i-1}+c_i)y_i-c_iy_{i+1}+\beta'_{i-1}M_{i-1}-(\beta'_{i-1}+\beta'_i)M_i+\beta'_iM_{i+1} \cdots\cdots(3)$$

$$P_i-Y_i=-c_{i-1}x_{i-1}+(c_{i-1}+c_i)x_i-c_ix_{i+1}-b_{i-1}y_{i-1}+(b_{i-1}+b_i)y_i-b_iy_{i+1}-\alpha'_{i-1}M_{i-1}+(\alpha'_{i-1}+\alpha'_i)M_i-\alpha'_iM_{i+1} \cdots\cdots(4)$$

図-1のように弦材が1,2……n と一連となっているものとし、次の各行列を定義して、(1),(3),(4)を行列で表わす。

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} 2(t_n+t_1) & t_1 & \cdots\cdots & t_n \\ t_1 & 2(t_1+t_2) & t_2 & \vdots \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ t_n & \cdots\cdots & t_{n-1} & 2(t_{n-1}+t_n) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}(\alpha')=\begin{bmatrix} \alpha'_n-\alpha'_1 & -\alpha'_1 & \cdots\cdots & \alpha'_n \\ -\alpha'_1 & \alpha'_1+\alpha'_2 & -\alpha'_2 & \vdots \\ \vdots & & \cdots\cdots & \\ -\alpha'_n & \cdots\cdots & \alpha'_{n-1} & \alpha'_{n-1}+\alpha'_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}(\beta')$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}(a)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{F}(b)$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}(c)$ とおけば

$$\boldsymbol{tM}=-\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{Ay} \qquad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{Ay} \quad \cdots (5)$$

$$\boldsymbol{H}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{Cy}-\boldsymbol{BM} \quad \text{すなわち} \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{Bt}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{Bt}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{X} \quad \cdots (6)$$

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{by}+\boldsymbol{AM} \qquad (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{At}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{At}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y} \quad \cdots (7)$$

たゞし、$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ は x_i, y_i, M_i, H_i, P_i, X_i, Y_i による列ベクトル（n 行1列）である。

つぎに、腹材 ij については、軸力は

$$N_{ij} = F_{ij}\left\{\alpha_{ij}(x_j - x_i) + \beta_{ij}(y_j - y_i) - \varepsilon t\, l_{ij}\right\}$$

u, v 成分は、 $X_{ij} = a_{ij}(x_i - x_j) + c_{ij}(y_i - y_j)$ $\quad Y_{ij} = c_{ij}(x_i - x_j) + b_{ij}(y_i - y_j)$

となる。ただし、 $\alpha_{ij} = \dfrac{u_j - u_i}{l_{ij}}$ $\quad \beta_{ij} = \dfrac{v_i - v_j}{l_{ij}}$ $\quad F_{ij} = \dfrac{EA_{ij}}{l_{ij}}$

$$a_{ij} = F_{ij}\,\alpha_{ij}^2 \qquad b_{ij} = F_{ij}\,\beta_{ij}^2 \qquad c_{ij} = F_{ij}\,\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

i 点に集まる全腹材についての和は、

$$X_i = x_i \sum_j a_{ij} - \sum_j a_{ij} x_j + y_i \sum_j c_{ij} - \sum_j c_{ij} y_j$$

$$Y_i = x_i \sum_j c_{ij} - \sum_j c_{ij} x_j + y_i \sum_j b_{ij} - \sum_j b_{ij} y_j$$

したがって

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{F}}(a)\\ \bar{\mathbf{b}} &= \bar{\mathbf{F}}(b)\\ \bar{\mathbf{c}} &= \bar{\mathbf{F}}(c)\end{aligned} = \begin{bmatrix} \Sigma a_{1j} & & -a_{ik} \\ & \Sigma a_{2j} \ddots & \\ -a_{ki} & & \Sigma a_{nj} \end{bmatrix}$$

： ik 要素は、ik 間に腹材があれば $-a_{ik}$ なければ 0 となる。

と定義すれば、全節点については、

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{a}}\,x + \bar{\mathbf{c}}\,y$$

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{c}}\,x + \bar{\mathbf{b}}\,y$$

となり　これより、(6), (7)を用いて $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ を消去し、温度項を付加すれば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{B}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{B}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A} \\ \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} + \mathbf{U} \\ \mathbf{P} + \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad \text{-----}(8)$$

ただし $U_i = \varepsilon t E\left(A_i\alpha_{i-1} - A_i\alpha_i - \sum_j A_{ij}\alpha_{ij}\right)$

$V_i = \varepsilon t E\left(A_i\beta_{i-1} - A_i\beta_2 - \sum_j A_{ij}\beta_{ij}\right)$

(8)は求める一般式であるが、右辺の荷重は互いに外力として、つりあっていなければ成立せず、また安定な支点の条件が入っていなければ解は存在しない。支点の条件の入れ方は、別項、任意形ラーメンの解法で示したのと全く同様である。

ヒンジ節点がある場合、たとえば k 点がヒンジのとき、$\mathbf{f}$ の kk 要素を 1　その他の k 行 k 列要素をすべて 0 とおきかえて逆行列を求め、その第 k 列要素をすべて 0 とおいたものを $\mathbf{f}^{-1}$ の代りに用いればよい。　本理論では、弦材は閉じた一連の部材よりなると仮定している。　曲げモーメントの正負の符号は、若い番号を左としたとき、慣用の符号に一致する。弦材が閉じない Deck type のような場合には、たとえば図-3のように番号をふり、1, m, $m+1$, n にヒンジ節点の条件を与え、仮想部材 $n \sim 1$, $m \sim m+1$ の断面積 A_n, A_m を 0 とする。このとき、I_m, I_n には 0 でない任意値を与えるとよい。

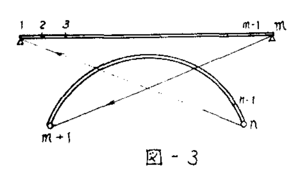

図-3

参考文献

児嶋、成岡 : Nielsen system 橋

土木学会誌 47.4