I−58 曲線箱桁の断面変形について

東京大学工学部　正員　奥村敏恵
東京大学大学院　正員　○落合重俊

1. はじめに

箱桁構造が大型化すると断面形を維持する為の隔壁等の設計が重要な問題になって来る。本論はこの問題を解決する第一段階として断面変形を考慮した釣合方程式を確立することにある。直線梁については既に V.Z.VLASOV によって確立されている。本論は特に隔壁の影響の大きい曲線桁について解を求めた。

2. 基礎方程式の生成

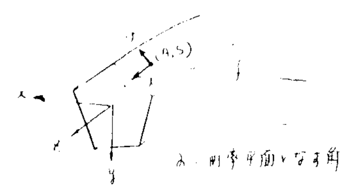
仮定；各板要素内では平面保持の法則が成り立ち、板要素の格点間距離は変形しないと仮定。

a.) 面外変位（格点数に等しい自由度をもつ）　$u(\theta,s) = \sum U_i(\theta)\cdot\varphi_i(s)$ (1)

b.) 面内変位（2倍の格点数−板要素数の自由度）　$v(\theta,s) = \sum V_k(\theta)\cdot\psi_k(s)$ (2)

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\partial u}{\rho\partial\theta} + \frac{v}{\rho}\cos\alpha \quad (3)$$

$$\gamma(\theta,s) = \frac{\partial v}{\rho\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{\rho}\cos\alpha \quad (4)$$


α：断面と平面のなす角

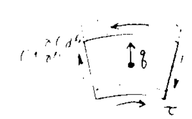
今単位角によって区切られた板要素帯に仮想仕事の原理を用いて仕事の釣合式をたてる。

面外仮想変位（φ_j）での釣合

$$\int_F \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\varphi_j\,dF - \int_F \tau\varphi_j'\,dF + \int_F \frac{\cos\alpha}{\rho}\tau\varphi_j\,dF + \int_L p\varphi_j\,ds = 0 \quad (5)$$

面内仮想変位（ψ_k）での釣合

$$\int_F \frac{\partial\tau}{\partial\theta}\psi_k\,dF + \int_L q\psi_k\,ds - \sum_k V_k\int_L \frac{M_k M_h}{EI(s)}ds = 0 \quad (6)$$



(1)(2)(3)(4) を考慮すると (5)(6) 式より基礎方程式を得る。

$$\frac{\gamma}{R_0}\sum U_i''a_{ji} + \frac{\gamma}{R_0}\sum V_k'b_{jk} - \frac{1}{R_0}\sum V_k'\bar{b}_{jk} - \sum U_i a_{ji}^{\circ} + \frac{1}{R_0^2}\sum U_i \bar{a}_{ji}$$
$$+ \frac{1}{R_0^2}\sum V_k'\bar{\bar{b}}_{jk} + \frac{1}{R_0}\sum U_i\bar{a}_{ij} - \frac{1}{R_0^2}\sum U_i\bar{\bar{a}}_{ji} + \frac{P_j}{G} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{R_0}\sum V_k''C_{hk} + \sum U_i'b_{hi}^{\circ} - \frac{1}{R_0}\sum U_i'b_{ih} - \gamma\sum V_k S_{hk} + \frac{q_h}{G} = 0 \quad (8)$$

但し　$\gamma = \frac{E}{G}$,　$S_{hk} = \frac{1}{E}\int_L \frac{M_h M_k}{EI(s)}ds$,　$P_j = \int_L p\varphi_j\,ds$,　$q_h = \int_L q\psi_h\,ds$,　$C_{hk} = R_0\int \frac{1}{\rho}\psi_h\psi_k\,dF$

$a_{ji} = R_0\int \frac{1}{\rho}\varphi_j\varphi_i\,dF$,　$\bar{a}_{ji} = R_0\int \frac{\cos\alpha}{\rho}\varphi_j'\varphi_i\,dF$,　$\bar{\bar{a}}_{ji} = R_0^2\int \frac{\cos^2\alpha}{\rho^2}\varphi_j\varphi_i\,dF$,　$a_{ji}^{\circ} = \int\varphi_j'\varphi_i'\,dF$

$b_{jk} = R_0\int \frac{\cos\alpha}{\rho}\varphi_j\psi_k\,dF$,　$\bar{b}_{jk} = R_0\int \frac{1}{\rho}\varphi_j'\psi_k\,dF$,　$\bar{\bar{b}}_{jk} = R_0^2\int \frac{\cos\alpha}{\rho^2}\varphi_j\psi_k\,dF$,　$b_{hi}^{\circ} = \int\psi_h\varphi_i'\,dF$

一般に $\varphi_{i(s)}$ $\psi_{k(s)}$ は全断面で直交するように選び、変位の自由度と等しい数だけ選ぶ。定数係数に用いた R_0 は中立軸の交点までの半径。この様に選べば軸方向力と曲げモーメントは連成しないが捩りによる連成項が生ずる。剪断中心の半径を用いると捩りと曲げモーメントには連成項は生じない。S_{hk} は変形角1と云う断面変形による内力仕事で次元ラーメン帯の解より求まる。

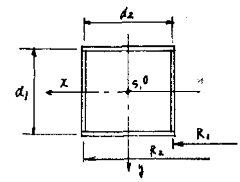
結局 (7)(8) の連立微分方程式の解を求めれば良く一般に定数係数の線形微分方程式の対称系は一つの等価な微分方程式に置き換えられる。その次数は U_i V_k の自由度の和の2倍に等しく $\theta=0$, $\theta=\theta_0$ での境界条件の数に等しい。U_i V_k が求まれば $P_j = \int E\sum\frac{1}{\rho}U_i'\varphi_i\varphi_j\,dF + \int E\sum\frac{\cos\alpha}{\rho}V_k\psi_k\varphi_j\,dF$ より断面力が求まる。

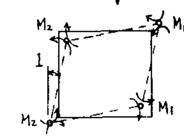
3. 2軸対称断面の計算例

本例の場合剪断中心と中立軸の交点とは非常に接近する。論旨より考えると計算上同一点と見做して差支えない。独立変位として断面輪郭上の函数である φ_i, ψ_k を次のように与える。

面外変位　$\varphi_1 = 1,\quad \varphi_2 = y,\quad \varphi_3 = x,\quad \varphi_4 = xy$

面内変位　$\psi_1 = \Gamma,\quad \psi_2 = y',\quad \psi_3 = x'\quad \psi_4 = x'y + y'x$





$$S_{44} = \frac{R_0 d_1}{3E^2 I_{\overline{w}}}\left(\frac{M_1^2}{R_1} + \frac{M_2^2}{R_2}\right) + \frac{2d_2}{3E^2 I_{\overline{F}}}\left(\frac{M_1^3 + M_2^3}{M_1 + M_2}\right)$$

$$M_1 = \frac{3a^* + \frac{2R_0}{R_2} b^*}{\left(a^* + \frac{R_0}{R_1} b^*\right)\left(a^* + \frac{R_0}{R_2} b^*\right)}$$

$$M_2 = \frac{3a^* + \frac{2R_0}{R_1} b^*}{\quad ''\quad}$$

$$b^* = \frac{d_1}{6EI_{\overline{w}}} \qquad a^* = \frac{d_2}{3EI_F}$$

以上を与えて(7)(8)式を各 j 変位，k 変位について列挙すると

$$\gamma F U_1'' + b_1 V_3' - \frac{\overline{F}_F}{R_0} U_1 + F_F U_3 + \frac{R_0}{G} P_1 = 0 \quad \text{------------} (1a)$$

$$\gamma I_x U_2'' - b V_1' + b V_4' + a_1 U_4 - c U_2 - F_w V_2' + \frac{R_0 P_2}{G} = 0 \quad \text{--------} (2a)$$

$$\gamma I_y U_3'' - F_F V_3' - C_1 U_3 + F_F U_1 + \frac{R_0 P_3}{G} = 0 \quad \text{------------} (3a)$$

$$\gamma I_{xy} U_4'' - \overline{a} V_1' - a V_4' - a^\circ R_0 U_4 + a_1 U_2 + \frac{R_0 P_4}{G} = 0 \quad \text{--------} (4a)$$

$$a V_1'' + \overline{a} V_4'' + \overline{a}^\circ R_0 U_4' + a_1 U_2' + \frac{R_0 q_1}{G} = 0 \quad \text{--------} (5a)$$

$$F_w V_2'' + R_0 F_w U_2' + \frac{R_0 q_2}{G} = 0 \quad \text{------------} (6a)$$

$$F_F V_3'' + R_0 F_F^\circ U_3' - F_F U_1' + \frac{R_0 q_3}{G} = 0 \quad \text{------------} (7a)$$

$$a V_4'' + \overline{a} V_1'' + a^\circ R_0 U_4' - a_1 U_2' - R_0 \gamma S_{44} V_4 + \frac{R_0 q_4}{G} = 0 \text{ -- } (8a)$$

但し　$I_x = R_0 \int \frac{1}{\rho} y^2 dF,\quad I_y = R_0 \int \frac{1}{\rho} x^2 dF,\quad I_{xy} = R_0 \int \frac{1}{\rho} x^2 y^2 dF,\quad I_{F0} = R_0 \int \frac{1}{\rho} x^2 dF_F,\quad \overline{I}_{F0} = R_0^2 \int \frac{1}{\rho^2} x^2 dF_F$

$F = R_0 \int \frac{1}{\rho} dF,\quad \overline{F} = R_0^2 \int \frac{1}{\rho^2} dF,\quad F_F = R_0 \int \frac{1}{\rho} dF,\quad \overline{F}_F = R_0^2 \int \frac{1}{\rho^2} dF_F,\quad F_w = R_0 \int \frac{1}{\rho} dF_w,\ F_w^\circ = \int dF_w,\ F_F^\circ = \int dF_F$

又　$\frac{d_1^2}{4} F_F = a_1,\quad \frac{d_2^2}{4} F_w = a_2,\quad a_1 + a_2 = a,\quad a_2 - a_1 = \overline{a} \qquad b = \gamma a_1 + \frac{\overline{a}_1}{R_0},\quad b_1 = \gamma F_F + \frac{\overline{F}_F}{R_0}$

$\frac{d_1^2}{4} F_F^\circ = a_1^\circ,\quad \frac{d_2^2}{4} F_w^\circ = a_2^\circ \qquad a_1^\circ + a_2^\circ = a^\circ,\quad a_2^\circ - a_1^\circ = \overline{a}^\circ \qquad c = R_0 F_w^\circ + \frac{\overline{a}_1}{R_0},\quad C_1 = R_0 F_F^\circ + \frac{I_{F0}}{R_0}$

(1a), (3a), (7a) は U_1, U_3, V_3 の微分項を含む故この3式で独立する。荷重項を除き同次型として求める。新しい函数 $U_1 = f_1'$ を導入すると6次の線形微分方程式が得られる。

$$EI_y f_1^{(6)} + G\left(\frac{\gamma I_y F_F}{F} - 2R_0 F_F^\circ - \frac{\overline{I}_{F0}}{R_0}\right) f_1^{(4)} + G\left(R_0 F_F^\circ - C_1 \frac{F_F}{F}\right) f_1^{(2)} = 0 \quad \text{--------} (9a)$$

結局6次の線形微分方程式を解く問題に帰され，f_1 が求まれば次式より各々 $U_1\ U_3\ V_3$ は求まる。

$$U_1 = f_1^{(1)},\qquad U_3 = \frac{\gamma F F_F}{A} f_1^{(3)} + \frac{\gamma F_F^2}{A} f_1^{(1)},\qquad V_3 = \frac{\gamma R_0 F F_F^\circ}{A} f_1^{(2)} + \frac{w}{A} f_1$$

（但し $w = F_F^2 - F_F^\circ \overline{F}_F,\quad A = \gamma R_0 F_F F_F^\circ - w$）

残りの(2a)(4a)(5a)(8a)式は(6a)式を用いると U_2, U_4, V_1, V_4 を全て含む式となり同様に新しい函数 $U_4 = f_2'$ を導入すると8次の線形微分方程式が得られる。その解より $U_2\ U_4\ V_1\ V_4$ は各々求められる。

$$f_2^{(8)} + \left\{\frac{(\gamma a_1 + w_1)}{\gamma I_x} - \frac{a\gamma I_{xy}}{4a_1 a_2 m}\right\} f_2^{(6)} + \frac{1}{2a_1 a_2 m}\left\{\hat{a} R_0 + \frac{I_{xy}}{2I_x}\left(\gamma a_1^2 + \frac{a_2 \overline{a}_1}{R_0} - a w_1\right)\right\} f_2^{(4)}$$
$$+ \frac{1}{2m\gamma I_x}\left\{\frac{a_2^\circ R_0 \gamma a_1}{a_2} - \frac{\overline{a}_1 a_1^\circ}{a_1} + \frac{R_0 \hat{a} w_1}{a_1 a_2}\right\} f_2^{(2)} \quad \text{------------} (10a)$$

（但し $m = \frac{I_{xy}}{R_0 S_{44}},\quad \hat{a} = a_2 a_1^\circ + a_1 a_2^\circ \qquad w_1 = R_0 (F_w - F_w^\circ)$）

$$U_4 = f_2^{(1)},\qquad U_2 = 2m f_2^{(5)} - \frac{a\gamma I_{xy}}{2a_1 a_2} f_2^{(3)} + \frac{\hat{a} R_0}{a_1 a_2} f_2^{(1)}$$

$$V_1 = -m f_2^{(4)} + \frac{\gamma I_{xy}}{2a_2} f_2^{(2)} - \frac{a_2^\circ}{a_2} f_2 \qquad V_4 = m f_2^{(4)}$$

又(6a)式より　$V_2 = -2mR_0 f_2^{(4)} + \frac{a\gamma R_0 I_{xy}}{2a_1 a_2} f_2^{(2)} - \frac{R_0^2 \hat{a}}{a_1 a_2} f_2$

以上特殊な場合の例について連立微分方程式を求めその同次型のみに対する等価微分方程式を求めた。勿論 $R = \infty$ によって直橋の式になる。又この式の解及び実験結果は当日表によって示す。