I－49　有限変位の弾性論の基本的問題について

東京大学　正員　工博　奥村敏恵
東大大学院　正員　秋山成興

座標変換に対してinvariantな量,性質を解析するのが,テンソル解析であるが,この性質によって色々な物理現象をより統一的な立場から考察出来る。
従ってテンソル解析は場の理論を始めとして色々な分野で多く使用されている。
応用力学の分野においても,流体力学,塑性力学,弾性学等においても大いに利用されている。
弾性学の分野では異方性の弾性学,複雑な境界を有する弾性体の解析等テンソル解析は応用されているが,特にシエル構造の解析,及び有限変位の弾性論の場合には特に必要である。シエルの形を規定する各種の曲面(中央面)はリーマン空間では,2次元空間になるから,リーマン幾何学として取扱えば便利であるし非常に分り易い。
本論文はシエル構造を主として対象に有限変位をうける場合の変形理論に対しテンソル解析の一計算例を示すと共に,抽象的なテンソル成分を物理成分に変換する過程を示した。

変形后のシエルに関しては,中央面の位置ベクトルを$\overset{*}{\mathbf{r}}$,単位法線ベクトルを$\overset{*}{\mathbf{n}}$,シエル内の任意点の位置ベクトルを$\overset{*}{\mathbf{R}}$,中央面から注目点までの距離をζでそれぞれ表す。図1より変形の際生ずるζの変化は高次の微小量として省略すれば次のように書ける。

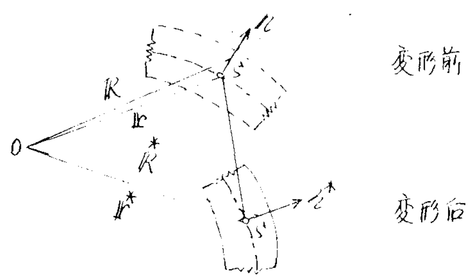


図 1

$$\overset{*}{\mathbf{R}} = \overset{*}{\mathbf{r}}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \overset{*}{\mathbf{n}}$$

変形の際のシエル中央面の変位ベクトルを$\mathbf{v}$とすると

$$\overset{*}{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + u^3 \mathbf{n} \qquad \mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\alpha}$$

$$d\overset{*}{\mathbf{R}} \cdot d\overset{*}{\mathbf{R}} = (\overset{*}{a}_{\alpha\beta} - 2\zeta \overset{*}{b}_{\alpha\beta} + \zeta^2 \nu_{\alpha\beta}) d\alpha^\alpha d\alpha^\beta = \overset{*}{g}_{\alpha\beta} d\alpha^\alpha d\alpha^\beta$$

但し　$\overset{*}{a}_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \overset{*}{\mathbf{r}}}{\partial \alpha^\alpha} \cdot \dfrac{\partial \overset{*}{\mathbf{r}}}{\partial \alpha^\beta}$　　$\overset{*}{b}_{\alpha\beta} = -\overset{*}{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \dfrac{\partial \overset{*}{\mathbf{n}}}{\partial \alpha^\beta} = \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha^\beta}$　　$\overset{*}{\nu}_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha^\alpha} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha^\beta}$

よって歪を次の様に定義する。即ち

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\overset{*}{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - \zeta(\overset{*}{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\zeta^2(\overset{*}{\nu}_{\alpha\beta} - \nu_{\alpha\beta})$$

この式より才1項は中央面の伸縮の歪を示し,才2項の曲げによる歪を示している事が分る。よって

$\frac{1}{2}(\overset{*}{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$ ＝ 中央面の伸縮の歪
$(\overset{*}{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$ ＝ 中央面の曲率変化　　と定義する。

以下変形について解析的な表示式を求めてみる。

$$\frac{1}{2}(\overset{*}{a}_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta})=\frac{1}{2}\{u_\beta|_\alpha+u_\alpha|_\beta-(b_{\rho\alpha}u^\rho|_\beta+b_{\alpha\kappa}u^\kappa|_\beta+2b_{\alpha\beta})u^3+b^\kappa_\alpha b_{\kappa\beta}(u^3)^2+$$
$$+u^\kappa|_\alpha u_\kappa|_\beta+u^3{}_{,\alpha}u^3{}_{,\beta}+b_{\lambda\alpha}u^\lambda u^3{}_{,\beta}+b_{\mu\beta}u^\mu u^3{}_{,\alpha}+b_{\lambda\alpha}b_{\mu\beta}u^\lambda u^\mu\}$$

$$\overset{*}{b}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\overset{*}{e}_\alpha}{\partial\alpha^\beta}\cdot\overset{*}{n}=[1+u^3b^\alpha_\alpha-\frac{1}{2}\{(u^3)^2(b^\alpha_\alpha)^2+a^{\alpha\alpha}(u^3{}_{,\alpha})^2\}]\cdot$$
$$\cdot[\{\partial_\beta(u^1|_\alpha-b^1_\alpha u^3)+\Gamma^1_{\alpha\beta}+(u^\rho|_\alpha-b^\rho_\alpha u^3)\Gamma^1_{\alpha\beta}-(u^3{}_{,\alpha}+b_{\lambda\alpha}u^\lambda)b^1_\mu\}\cdot$$
$$\cdot(u^1|_2u^3{}_{,1}-b^1_2u^3u^3{}_{,1}-b_{\alpha1}b^1_2u^\alpha u^3-u^1|_1u^3{}_{,2}+b^1_1u^3u^3{}_{,2}+b^1_1b_{\alpha2}u^3u^\alpha-u^3{}_{,2}-b_{\alpha2}u^\alpha)$$
$$+\{b_{\alpha\beta}+(u^\kappa|_\alpha-b^\kappa_\alpha u^3)b_{\beta\kappa}+\partial_\beta(u^3{}_{,\alpha}+b_{\lambda\alpha}u^\lambda)\}\cdot$$
$$\cdot\{1+(u^\lambda|_\lambda-u^3b^\alpha_\alpha)-(u^1|_1b^2_2+u^2|_2b^1_1-u^2|_1b^1_2-u^1|_2b^2_1)u^3+(b^1_1b^2_2-b^2_1b^1_2)(u^3)^2\}]$$

但し　$v^\kappa|_\lambda=\dfrac{\partial v^\kappa}{\partial\alpha^\lambda}+\Gamma^\kappa_{\lambda\alpha}v^\alpha$　　$\Gamma^\kappa_{\lambda\alpha}=\dfrac{1}{2}a^{\kappa\beta}\left(\dfrac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^\lambda}+\dfrac{\partial a_{\lambda\beta}}{\partial\alpha^\alpha}-\dfrac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial a^\beta}\right)$

以上歪テンソルと曲率テンソルの成分を求めたが、これらはあく迄も抽象的なものである。（第一に次元が夫々異なる。）我々にとって必要なのはその物理成分である。歪テンソル、曲率テンソルの成分は何れも2階の共変成分として求められているから、その物理成分を夫々 $\overline{e_{\alpha\beta}}$，$\overline{\kappa_{\alpha\beta}}$ で表すと次式を得る。

$$\overline{e_{\alpha\beta}}=\overline{a_{\alpha\beta}}\left(\frac{\sqrt{\overset{*}{a}_{\alpha\alpha}}\sqrt{\overset{*}{a}_{\beta\beta}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}\sqrt{a_{\beta\beta}}}-1\right);\quad\overline{\kappa_{\alpha\beta}}=\overline{b_{\alpha\beta}}\left(\frac{\sqrt{\overset{*}{a}_{\alpha\alpha}}\sqrt{\overset{*}{a}_{\beta\beta}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}\sqrt{a_{\beta\beta}}}-1\right)$$

計算例

(1) 直角デカルト座標の場合　　平板の変形　　$\alpha^1=x$　$\alpha^2=y$

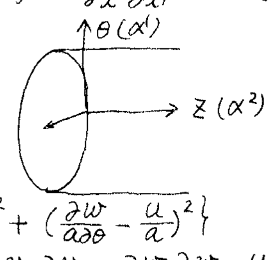
$b_{\alpha\beta}$，$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ はすべて0，$u^1=u$，$u^2=v$，$u^3=w$　とすれば

$$2\overline{e_{\lambda\mu}}=\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu}+\frac{\partial u}{\partial x^\lambda}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^\mu}+\frac{\partial v}{\partial x^\lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^\mu}+\frac{\partial w}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w}{\partial x^\mu}$$

$$\overline{\kappa_{\lambda\mu}}=[1-\frac{1}{2}\{(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2\}]\cdot[\frac{\partial^2u}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x})+$$
$$+\frac{\partial^2v}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y})+\frac{\partial^2w}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})]$$

(2) 円筒座標の場合

図のように座標系を選ぶと



$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ はすべて0。

$b_{11}=a$　　$b_{12}=b_{22}=0$

$$\overline{e_{11}}=\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{w}{a}+\frac{1}{2}\{(\frac{\partial u}{a\partial\theta}+\frac{w}{a})^2+(\frac{\partial v}{a\partial\theta})^2+(\frac{\partial w}{a\partial\theta}-\frac{u}{a})^2\}$$

$$\overline{e_{12}}=\frac{1}{2}\{\frac{\partial v}{a\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{w}{a}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{a\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{a\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{a\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{u}{a}\frac{\partial w}{\partial z}\}$$

$$\overline{\kappa_{11}}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}+\frac{w}{a^2}-\frac{1}{2a}\{(\frac{\partial w}{a\partial\theta})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2\}-\frac{1}{a}\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{a^3}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{w^2}{2a^3}-$$
$$-\frac{1}{2a^2}\{(\frac{\partial w}{a\partial\theta})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2\}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}+\frac{13w}{a^3}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{3u}{a^3}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{2w}{a^4}(\frac{\partial w}{\partial\theta})^2$$