I－42 格子桁におけるHOMBERG解法の限界について

法政大学 工博 正員 大地 羊三

§1 まえがき

格子桁の解法は，Leonhart，Homberg，Fisher，Cornerius Szabo 等十指にあまるものがある。著者もさきに変形法にもとずく一解法を提案した。しかし実際に電子計算機にかけるべく，coding してみると，部材数，節点数が非常に多くなり，大きな格子桁を対象にするとmemory が over-flow する。そこでmemory 数が比較的少なくてすむと思われる，Homberg 流の考え方にもとずり，これがどこまで拡張出来るか考えてみた。

§2 ねじり剛性のない格子構造物の一般式

不静定力Zとして，格子交点の反力を取ると，弾性方程式は次の如くなる。

$$\boxed{\sum_{k,l} D^{ik}_{jl} Z^{k\omega}_{l\nu} = -D^{i\omega}_{j\nu}} \quad \begin{pmatrix} i = b \sim m-1 \\ j = 1 \sim n \end{pmatrix} \quad \text{---(1)}$$

但しk主桁とl横桁との交点（以下kl点とよぶ事にする）に作用する荷重に対する，i主桁とj横桁との交点（ij点）の物理量をA^{ik}_{jl}の如く表わした（これをHombergの流儀で表わすと$A_{ik,jl}$となる）

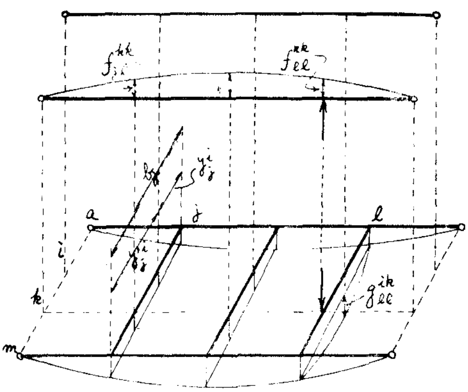

図1 記号の説明

したがってD^{ik}_{jl}は静定基本形（図1）において，kl点に単位不静定力が作用したときのij点のたわみであって

$$D^{ik}_{jl} = \delta^{ik} f^{ii}_{jl} + \frac{y'^i_j y'^k_l}{b_j b_l} f^{aa}_{jl} + \frac{y^i_j y^k_l}{b_j b_l} f^{mm}_{jl} + g^{ik}_{jj} \delta_{jl} \quad \text{---(2)}$$

で表わされる。ここにδ^{ik}，δ_{jl}はクロネッカーの記号，f^{ii}_{jl}はi主桁を取り出し，そのil点に単位荷重が作用したときのij点のたわみ，g^{ik}_{jj}はjを取り出し，そのkj点に単位荷重が作用したときのij点のたわみ，y^i_jはaj点からij点までの距離，y'^i_jはmj点からij点までの距離，b_jはj横桁の支間である。

又，$D^{i\omega}_{j\nu}$は静定基本形において，ων点に単位荷重が作用したときの，ij点のたわみであって，次の二つの場合が考えられる。

(a) 床版が主桁で支えられる場合

$$D^{i\omega}_{j\nu} = \delta^{i\omega} f^{ii}_{j\nu} \quad \text{---(3)}$$

(b) 床版が横桁で支えられる場合

$$-D^{i\omega}_{j\nu} = \frac{y'^i_j \omega'}{b_j b_\nu} f^{aa}_{j\nu} + \frac{y^i_j \omega}{b_j b_\nu} f^{mm}_{j\nu} + g^{i\omega}_{jj} \delta_{j\nu} \quad \text{---(4)}$$

§3 Hombergの基本式

今(1)～(4)式において主桁および横桁が相似であり $f^{ii}_{jl} = r^i f_{jl}$，$g^{ik}_{jj} = r_j g^{ik}$ ---(5)

（但し f_{jl}，g^{ik}は夫々基準に取った主桁および横桁のたわみ，r^i，r_jは比例常数）と表わされ，

すべての横桁が主桁と交わる点が相似で　　$y_j^i/b_j = y^i/b$ ，$y_j'^i/b_j = y'^i/b$ -----(6)
（但し b, y^i, y'^i は夫々基準に取った横桁に関する量である）と表わされるものとすると，(2)～(4) 式は夫々次の如く書きかえられる。

$$D_{jl}^{ik} = \left(\delta^{ik}r^i + \frac{y'^i y'^k}{b^2}r^a + \frac{y^i y^k}{b^2}r^m\right)f_{jl} + g^{ik}\delta_{jl}r_l \quad \text{------------------(7)}$$

$$D_{j\nu}^{i\omega} = \delta^{i\omega}r^i f_{j\nu} \text{-----(8)} \qquad D_{j\nu}^{i\omega} = -\left(\frac{y'^i\omega'}{b^2}r^a + \frac{y^i\omega}{b^2}r^m\right)f_{i\nu} - g^{i\omega}\delta_{j\nu}r_i \quad \text{-----------(9)}$$

(7)～(9)式を (1) 式に代入し，マトリックスで表示すると，次の如くなる。

$$\left[r^i\delta^{ik} + y'^i\frac{r^a}{b^2}y'^k + y^i\frac{r^m}{b^2}y^k\right]\left[Z_{l\nu}^{k\omega}\right]\left[f_{lj}\right] + \left[g^{ik}\right]\left[Z_{l\nu}^{k\omega}\right]\left[\hat{r}_l\right] = \begin{cases} -\left(r^i\delta^{i\omega}\right)\left(\tilde{f}_{\nu j}\right) \\ \left(y'^i\frac{r^a}{b^2}\omega' + y^i\frac{r^m}{b^2}\omega\right)\left(\tilde{f}_{\nu j}\right) + \left(g^{i\omega}\right)\left(\widetilde{\delta_{\nu j}r_j}\right) \end{cases} \text{----(10)}$$

但し $[r^i\delta^{ik}+\cdots\cdots]$, $[g^{ik}]$ は i, k をインデックスとする行列，$[Z_{l\nu}^{k\omega}]$, $[f_{lj}]$ は k, l をインデックスとする行列，$[\hat{r}_l]$ は r_l を対角要素とする対角行列である。又 $(r^i\delta^{i\omega})$, $(y'^i\frac{r^a}{b^2}\omega'+\cdots\cdots)$, $(g^{i\omega})$ は i をインデックスとする列ベクトル，$(\tilde{f}_{\nu j})$, $(\widetilde{\delta_{\nu j}r_j})$ は j をインデックスとする行ベクトルである。

(10)式が Homberg の基本式である事は，次の如くしてたしかめられる。不静定力 $[Z_{l\nu}^{k\omega}]$ を群荷重 $[\alpha_{(n)l}]$ の一次式として　$[Z_{l\nu}^{k\omega}] = [Z_{(n)\nu}^{k\ \omega}][\alpha_{(n)l}]$ -----(11)　で表わし
$[\alpha_{(n)l}][f_{lj}] = [\hat{\omega}_{(n)}][\alpha_{(n)l}][\hat{r}_l]$------(12) を満足するように $[\alpha_{(n)l}]$ を選ぶと，$[\omega_{(n)}]$, $[\alpha_{(n)l}][\sqrt{\hat{r}_l}]$ が $[\sqrt{\hat{r}_l}]^{-1}[f_{lj}][\sqrt{\hat{r}_j}]^{-1}$ の固有値および固有ベクトルとなる。この事を利用して，(10)式を変形すると，

$$\boxed{\left[r^i\delta^{ik} + y'^i\frac{r^a}{b^2}y'^k + y^i\frac{r^m}{b^2}y^k\right]\left[Z_{(n)\nu}^{k\ \omega}\right]\left[\hat{\omega}_{(n)}\right] + \left[g^{ik}\right]\left[Z_{(n)\nu}^{k\omega}\right] = \begin{cases} -\left(r^i\delta^{i\omega}\right)\left(\widetilde{\gamma_{\nu(n)}\mu_n}\right)\left[\omega_{(n)}\right] \\ \left(y'^i\frac{r^a}{b^2}y'^k + y^i\frac{r^m}{b^2}y^k\right)\left(\widetilde{\gamma_{\nu(n)}\mu_{(n)}}\right)\left[\omega_{(n)}\right] + \left(g^{i\omega}\right)\left(\widetilde{\gamma_{\nu(n)}\mu_{(n)}}\right) \end{cases}} \text{----(13)}$$

が得られる。但し $[\alpha_{(n)l}][\hat{r}_l][\alpha_{l(n)}] \equiv [\hat{\mu}_{(n)}]^{-1}$,　$(\tilde{f}_{\nu j})[\alpha_{j(n)}][\hat{\omega}_{(n)}]^{-1} \equiv (\widetilde{\gamma_{\nu(n)}})$ とおいた。
(13)式は Homberg が誘導した解式を，行列で表示したものとなっている。

§4　Homberg 流の解法が適用出来る範囲

任意格子桁に対する弾性方程式(1) より Homberg の解式(13) を誘導するにあたって (5) (6) 式の仮定をした。したがってこの仮定さえ成立てば Homberg 流の解法が適用出来る。これを文章で述べると『各主桁および各横桁の断面二次モーメントが相似であれば，図2の幾何形状のものまで，Homberg 流の解法で解く事が出来る』と云う事である。

以上述べた事は主桁にねじり剛性のない場合の事である。ねじり剛性のある場合については，現在検討中であるが，更に条件がきつくなるであろうと想像される。

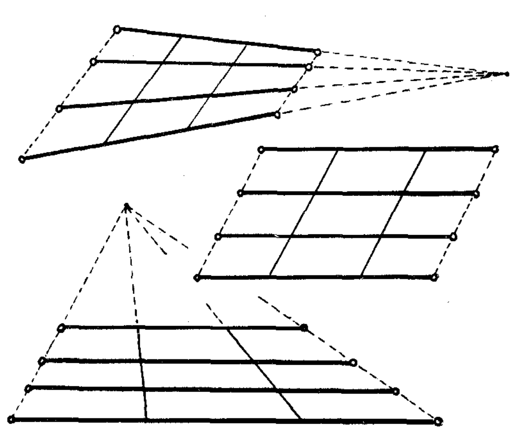

図2 Homberg 流の解法が適用出来る格子桁