I−39　吊橋主塔の動的弾性安定

東京大学工学部　正員　平井　敦
同　　　同　○伊藤　学

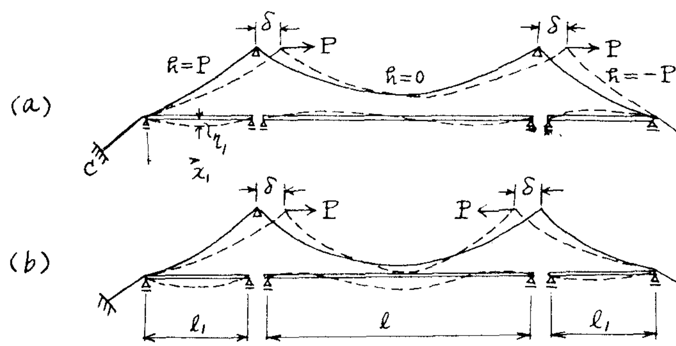
1. 研究の目的と内容

吊橋の主塔は主として圧縮材として設計されることはもちろんであるが，その細長比は場合によって非常に差があり，この点に関してはとくに定められた條件もまだないようである。長径間吊橋の塔はフレキシブル形式であり，大風や地震を受ける場合には吊構造本体と共にかなりの変形を生じるであろうことを考えると，その弾性安定に関して慎重な配慮が必要である。

塔の座屈荷重の計算法については小西・高岡の研究[1]があるが，これにはケーブルによる復元力の影響は考慮されていない。筆者らは，吊橋主塔の座屈計算に主ケーブルの変形にともなう復元力を考慮すると共に，吊橋のように振動が重要な問題となる構造物においては，その主塔の弾性安定も従来のように静力学的見地からのみではなく，荷重の動的成分も考慮しなければならないことに着目して，いわゆる parametric instability の概念を導入した考察を行なうことを提唱する。

側径間を有する対称な吊橋のフレキシブル形式主塔を対象とする以下の記述においては，基本的な考え方を示すために塔の断面は一定とし，補剛げたからの反力も省略しているが，実際の構造を対象とした計算では当然これらも考慮される。

2. ケーブルによる復元力



図−1

吊橋主塔上の位置においてケーブルに図−1のような水平方向の力 P を作用させるとき，その点の変位 δ を計算する。記号は図−1に示すものの他は慣用のものを用いることにする。

まず図−1(a)のような弾性変形の際のポテンシャルエネルギ V および荷重 P の作用方向のエネルギ変化 W_e は次式で与えられる[2]。

$$V=\frac{1}{2}\left[2EI\int_0^{l_1}\eta_1''^2\,dx_1+2H_w\int_0^{l_1}\eta_1'^2\,dx_1+\frac{32f_1}{l_1^2}P\int_0^{l_1}\eta_1\,dx_1\right]\quad\cdots(1)$$

$$W_e=2P\delta\quad\cdots(2)$$

一方，荷重点の変位 δ は次式で計算される。

$$\delta=P\frac{L_{ES}}{E_cA_c}-\frac{8f_1}{l_1^2}\int_0^{l_1}\eta_1\,dx_1\quad\cdots(3)$$

ここに，ケーブル各点の傾斜角を γ として

$$L_{ES} = \int_c^{l_1} \frac{dx}{\cos^3\gamma}$$

上式における吊構造の鉛直たわみ η はエネルギ最小の原理（$V - W_e = min.$）より決定される。側径間のたわみを

$$\eta_1(x) = \pm \sum_j a_j \sin\frac{j\pi x_1}{l_1}, \quad (j = 奇数) \cdots\cdots\cdots (4)$$

とおけば，$\partial(V - W_e)/\partial a_j = 0$ より a_j が求まる。この結果を式（3）に代入し，この場合の塔頂位置におけるケーブルの復元作用をバネに置換えれば，そのバネ常数は

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{1}{\dfrac{L_{ES}}{E_c A_c} + \dfrac{1024 f_1^2}{\pi^4 l_1 H} \sum \dfrac{1}{j^3\left(1 + \dfrac{j^2\pi^2}{\nu_1^2}\right)}} \cdots\cdots\cdots (5)$$

ただし　$\nu_1 = l_1\sqrt{H/EI}$，　$j = 1, 3, 5, \cdots\cdots$

図-1（b）など他の場合についても同様にして換算バネ常数が求められる。

3. 塔の弾性安定

吊橋主塔の座屈を検討する際は図-2のような系を扱うことになる。EI_T を塔の平均曲げ剛性，C を塔の高さ，V を塔頂における主ケーブルの鉛直反力成分とすれば，前出のバネ常数 k および図-2の記号を用いてつりあいの方程式をつくれば

$$EI_T\frac{d^2v}{du^2} + k\delta(c - u) - V(\delta - v) = 0 \cdots\cdots (6)$$

V が一定な静的問題の場合，$u = 0$ で $v = \frac{dv}{du} = 0$ なる境界条件を用いて上式を解けば

$$v = \delta\left[1 - \frac{k}{V}(c - u) - \frac{k}{V\alpha}\sin\alpha u - \left(1 - \frac{kc}{V}\right)\cos\alpha u\right] \cdots\cdots (7)$$

ただし　$\alpha = \sqrt{V/EI_T}$

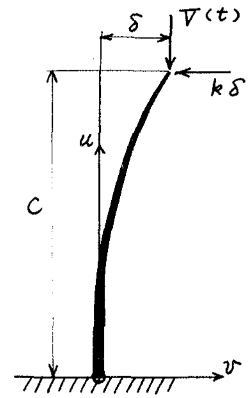


図-2

$u = c$ において $v = \delta$ という条件から座屈荷重 V_{cr} を求める方程式が次のように得られる。

$$\tan\alpha c = \alpha c\left(1 - \frac{\alpha^2 EI_T}{kc}\right) \cdots\cdots\cdots (8)$$

吊橋が振動しているときは，ケーブルよりの荷重 V は，たとえば

$$V = V_0 + V_1 \sin\omega t \cdots\cdots\cdots (9)$$

のように考えなければならない。この際 $\cdot$ を時間に関する微分，$'$ を u に関する微分として

$$m\ddot{v} + EI_T v'''' + (V_0 + V_1\sin\omega t)v'' = 0 \cdots\cdots (10)$$

を，$u = 0$ において $v = v' = 0$，$u = c$ において $v = \delta$，$EI_T v''' + Vv' = k\delta$ なる条件のもとに解くことになる。式（10）は単純支持柱の場合 Mathieu の微分方程式に帰せられることが知られており，いくつかのパラメータを用いて安定，不安定が論じられる。

1）土木学会論文集 第96号（昭和38年8月），変断面として数値計算を行なっている。

2）Fr. Bleich の計算法で a_j を求めるのと類似であるが，同式には若干誤まりがあるので注意を要する。