I－36　列車走行による吊橋の捩れ振動の一解法

日本交通技術株式会社　正員　西田繁一

正員　○鳥井信一

複線軌道を有する吊橋上で、列車がすれちがったり、一列車が走る時　その列車によって捩れ力が作用するが、その捩れ力によって吊橋がどの様な振動をするかをあつかったものである。

ΔH_1, ΔH_2 を列車載荷によるケーブル水平張力の増分とすると、吊橋振動の基本方程式は

$$EJ_x\frac{\partial^4\eta}{\partial z^4}-(2H+\Delta H_1+\Delta H_2)\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}-(\Delta H_1-\Delta H_2)\frac{b}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\frac{\gamma J_x}{g}\frac{\partial^4\eta}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=q_y(z,t) \qquad (1)$$

$$EJ_w\frac{\partial^4\theta}{\partial z^4}-GJ_d\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\left(H+\frac{\Delta H_1+\Delta H_2}{2}\right)\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-(\Delta H_1-\Delta H_2)\frac{b}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}-\frac{\gamma J_w}{g}\frac{\partial^4\theta}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\gamma F r^2}{g}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=m(z,t) \qquad (2)$$

で表される。ΔH_1 ΔH_2 は次の式より、試算により求められる。

$$\Delta L_{1,2}=\frac{\Delta H_{1,2}}{EA}L_s-\frac{8f}{\ell^2}\int_0^{\ell}\left(\eta\pm\frac{b}{2}\theta\right)dz \qquad (3)$$

しかし、ΔH_1, ΔH_2 は H に較べて十分小さいから、その差を無視すると、(2) 式は θ のみの偏微分方程式となる。

$$EJ_w\frac{\partial^4\theta}{\partial z^4}-GJ_d\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\left(H+\frac{\Delta H_1+\Delta H_2}{2}\right)\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\frac{\gamma J_w}{g}\frac{\partial^4\theta}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\gamma F r^2}{g}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=m(z,t)$$

今、単純吊橋の場合を考へると、$\theta(z,t)=\sum\theta_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z$ は その境界条件を満足し、

さらに $m(z,t)=f(t)\sum m_n\sin\frac{n\pi}{\ell}z$ のフーリエの形に置き (4) 式に代入すると (4) 式は

$$\left[\frac{\gamma J_w}{g}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+\frac{\gamma F r^2}{g}\right]\theta''(t)+\left[EJ_w\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4+GJ_d\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+H'\frac{b^2}{2}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\right]\theta_n(t)=f(t)\cdot m_n \qquad (5)$$

となる。しかし $m_n=\frac{2}{\ell f(t)}\int_0^{\ell}m(z,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z\,dz$ で表される。(5) 式を簡単に書くと、

$$A\,\theta_n''(t)+B\,\theta_n(t)=f(t)\cdot m_n \qquad (5)'$$

である。

(5)′式をラプラス変換すると $A\left[S^2\bar{\theta}_n(S)-S\theta_n(0)-\theta_n'(0)\right]+B\bar{\theta}_n(S)=m_n\bar{f}(S)$ となる。

初期条件が $\theta(0)=\theta'(0)=0$ で与へられていると $\bar{\theta}_n(S)=\frac{m_n\bar{f}(S)}{AS^2+B}$ となる　(6)

(6)式の分母 $AS^2+B=0$ の解は固有振動数を与える。この値を ω_n とすると (6) 式は次の様になる。

$\bar{\theta}_n(S)=\frac{m_n}{A}\frac{\bar{f}(S)}{S^2+\omega_n^2}$，この式を逆変換すると $\theta_n(t)=\frac{m_n}{A\omega_n}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$ となる。(7)

初期条件が $\theta_n(0)=\theta(z)$ の形で与えられていると、$\theta'(0)=\theta'(z)$ であり、

$$\theta_n(t)=\frac{m_n}{A\omega_n}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau+\theta(z)\cos\omega_n t+\frac{\theta'(z)}{\omega_n}\sin\omega_n t$$ となる。(8)

○集中荷重が $z=x$ 点に衝撃的に作用したとき，$m(z,t)=m\,\delta(z-x)\,\delta(t)$

$$\theta(t,z)=\sum\frac{2m}{A\ell\omega_n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}z$$

○集中荷重が $z=x$ 点に静的に作用したとき，$m(z,t)=m\,\delta(z-x)$

$$\theta(t,z)=\sum\frac{2m}{A\ell\omega_n^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,(1-\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z$$

○等分布荷重が衝撃的に作用する場合　$m(z,t)=m\left[U(z-x)-U(z-\Lambda-x)\right]\delta(t)$

$$\theta(t,z)=\sum\frac{2m}{An\pi\omega_n}\left[\cos\frac{n\pi}{\ell}x-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+\Lambda)\right]\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi}{\ell}z$$　Λ：列車長

○等分布荷重が静的に作用する場合，$m(z,t)=m\left[U(z-x)-U(z-\Lambda-x)\right]$

$$\theta(z,t)=\sum\frac{2m}{An\pi\omega_n^2}\left[\cos\frac{n\pi}{\ell}x-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+\Lambda)\right](1-\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z \qquad (12)$$

○時間の正弦函数の集中荷重が $z=x$ に作用する場合　$m(z,t)=m\sin\lambda t\;\delta(z-x)$

$$\theta(z,t)=\sum\frac{2m}{A\ell\omega_n}\frac{\lambda}{\lambda^2-\omega_n^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\left(\sin\omega_n t-\frac{\omega_n}{\lambda}\sin\lambda t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}z \qquad (13)$$

○時間の正弦函数の等分布荷重が作用した場合， $m(z,t) = m \sin \lambda t\, [\,u(z-\lambda) - u(z-\lambda-\Lambda)\,]$

$$\theta(z,t) = \sum \frac{2m}{An\pi\omega_n} \frac{\lambda}{\lambda^2-\omega_n^2} \left[\cos\frac{n\pi}{\ell}\lambda - \cos\frac{n\pi}{\ell}(\lambda+\Lambda)\right]\left(\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\lambda}\sin\lambda t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}z \tag{14}$$

○任意の荷重が載荷された断面の場合，

(4)式に於て $\theta(z,t) = \sum \theta(z)\sin\omega_n t$, $m(z,t) = f(z)\sum m_n \sin\omega_n t$ と置くと，

$EJ_\omega \theta''''(z) - \left(GJ_d + H\frac{b^2}{2} - \frac{\gamma J_\omega}{g}\omega_n^2\right)\theta''(z) - \frac{\gamma F r^2}{g}\omega_n^2\theta(z) = f(z)\cdot m_n$ となる。簡単に書くと

$\theta''''(z) - a\theta''(z) - b\theta(z) = \frac{m_n}{EJ_\omega}f(z)$ であり，この解を求めると次の様になる。（$b>0$の場合）

$$\theta(z) = \frac{m_n\rho}{EJ_\omega}\int_0^z f(\xi)\left\{\frac{1}{\alpha}\,sh\,\alpha(z-\xi) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(z-\xi)\right\}d\xi + \theta(0)\rho(\alpha^2 ch\,\alpha z + \beta^2\cos\beta z) + \theta'(0)\rho(\alpha\, sh\,\alpha z + \beta\sin\beta z) + \rho\left[\theta''(0) - C\theta(0)\right](ch\,\alpha z - \cos\beta z) + \rho\left[\theta'''(0) - C\theta'(0)\right]\left(\frac{1}{\alpha}sh\,\alpha z - \frac{1}{\beta}\sin\beta z\right) \tag{15}$$

ここに $\alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}}$ $\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2}}$ $\rho = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}$

そこで適当に吊橋上に載荷された荷重について $f(z)$ が適当な函数に表される任意の部分，I 一定の部分として小区分に分けて考える。この小区分の左側の条件（$z=0$ で $\theta=\theta_L$ $\theta'=\theta'_L$ $B=-EJ_\omega\theta''=B_L$，$-EJ_\omega\theta'''+GJ_d\theta' = H_L$）より積分定数（$\theta(0)$，$\theta'(0)$，$\theta''(0)$，$\theta'''(0)$）を求めて(15)式に代入すると，区分の右側の応力は左側の条件で定められたことになる。この左端を，支点にとると支点条件はこの場合，$\theta_L = B_L = 0$ であり未知数 θ'_L，H_L の2個を含むものとして 小区分について計算をして右端の支点に至る。この支点で 2個の条件より未知数を求める。

以上は全て 荷重が $z=\lambda$ に作用した場合，又は ある一瞬に作用している荷重状態によって任意時間後の任意点の振動性状を表わしている。しかし次の瞬間には荷重は移動し変化しているからこの時間の荷重についても同様な計算をくり返さねばならない。そして，任意時間後の移動する荷重の吊橋への影響は これらを時刻を一致して加へ合わせたもので表される。

○連成振動を起す場合

$\eta(z,t) = \sum \eta(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z$, $q_y(z,t) = f(t)\sum q_n \sin\frac{n\pi}{\ell}z$

$\theta(z,t) = \sum \theta(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}z$, $m(z,t) = f(t)\sum m_n \sin\frac{n\pi}{\ell}z$

これを(2)式に代入すると

$$\left.\begin{aligned} A\eta''(t) + B\eta(t) + C\theta(t) &= q_n f(t) \\ \alpha\theta''(t) + \beta\theta(t) + \gamma\eta(t) &= m_n f(t) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

この式をラプラス変換して $\bar{\eta}(s)$，$\bar{\theta}(s)$ を求めると

$$\bar{\eta}(s) = \frac{\bar{f}(s)\begin{bmatrix} q_n, & C \\ m_n, & \alpha s^2+\beta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} As^2+B, & C \\ \gamma, & \alpha s^2+\beta \end{bmatrix}} \qquad \bar{\theta}(s) = \frac{\bar{f}(s)\begin{bmatrix} As^2+B, & q_n \\ \gamma, & m_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} As^2+B, & C \\ \gamma, & \alpha s^2+\beta \end{bmatrix}} \quad \text{となる} \tag{17}$$

$\begin{vmatrix} As^2+B, & C \\ \gamma, & \alpha s^2+\beta \end{vmatrix} = 0$ は連成振動の固有振動数を与える。この解を ω_{1n}，ω_{2n} として(16)式を解くと

$$\eta(t) = \frac{q_n}{A}\frac{1}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}\int_0^t f(\tau)\left[\omega_{1n}\sin\omega_{1n}(t-\tau) - \omega_{2n}\sin\omega_{2n}(t-\tau)\right]d\tau - \frac{\beta q_n - C m_n}{A\alpha}\frac{1}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}\int_0^t f(\tau)\left[\frac{1}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t-\tau) - \frac{1}{\omega_{2n}}\sin\omega_{2n}(t-\tau)\right]d\tau \tag{18}$$

$$\theta(t) = \frac{m_n}{\alpha}\frac{1}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}\int_0^t f(\tau)\left[\omega_{1n}\sin\omega_{1n}(t-\tau) - \omega_{2n}\sin\omega_{2n}(t-\tau)\right]d\tau - \frac{B m_n - \gamma q_n}{A\alpha}\frac{1}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}\int_0^t f(\tau)\left[\frac{1}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t-\tau) - \frac{1}{\omega_{2n}}\sin\omega_{2n}(t-\tau)\right]d\tau \tag{19}$$

である。