

I-31 曲線桁橋の強制振動に関する基礎的研究

大阪市立大学 正員 工博 小松定夫

“ “ 工修 中井博

1 ま え が き

曲線桁橋の振動は、たわみ振動とねじり振動の連成問題として取扱わなければならない¹⁾。そこで本研究はLagrangeの方程式によって、曲線桁橋の減衰特性をも考慮した簡明な運動方程式を誘導する。そして、曲線桁橋のi)自由振動、ii)周期力による強制振動、iii)移動荷重による桁のレスポンスについて明らかにしようとするものである。

従来、この種の問題は、演算子による解析的方法あるいは数値積分法が有用な手段であったが、アナログ計算機によって微分方程式を直接解くことを考える。

2 基礎微分方程式

図-1に示す曲線桁橋において、水平軸y方向の変位vを小さいものとして無視すれば、鉛直軸z方向の変位wおよびx軸まわりの断面回転角βに関して次の運動方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} w(\Delta, t) &= \sum_{i=1,2,\dots} \Omega_i(\Delta) \cdot \dot{w}_i(t) \\ \beta(\Delta, t) &= \sum_{i=1,2,\dots} \Omega_i(\Delta) \cdot \dot{\beta}_i(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに Ω_i は正規関数で、時間関数 $\dot{w}_i, \dot{\beta}_i$ は次の連立微分方程式で与えられる。(・ = d/dt)

$$\left. \begin{aligned} M_{B,i} \ddot{w}_i + C_{w\omega,i} \dot{w}_i + K_{w\omega,i} w_i \\ + M_{B,i} e_g \ddot{\beta}_i + C_{L\omega,i} \dot{\beta}_i + K_{L\omega,i} \beta_i = F_i \\ M_{B,i} e_g \ddot{w}_i + C_{wL,i} \dot{w}_i + K_{wL,i} w_i \\ + I_{B,i} \ddot{\beta}_i + C_{L\beta,i} \dot{\beta}_i + K_{L\beta,i} \beta_i = F_i \cdot e_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)で、 $M_{B,i}, I_{B,i}$ は第i次振動時の曲線桁橋の有効質量、回転質量を意味し、

$$M_{B,i} = m A L_i \sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}, \quad I_{B,i} = m I_y L_i \sum_{r=1}^n \nabla_{i,r} \dots\dots\dots (3)$$

そして、 K 値は換算バネ常数で、例へば $K_{w\omega,i}$ はせん断中心を単位量だけ変位させるに要する力を意味する。従って

$$\left. \begin{aligned} K_{w\omega,i} &= \frac{E_s I_y}{L_i^3} \left\{ (k_i L_i)^4 \sum_{r=1}^n \nabla_{i,r} + \frac{C_w}{I_y L_i} (k_i L_i)^4 \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi}{L_r} \right)^2 \nabla_{i,r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_s J}{E_s I_y} (k_i L_i)^2 \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi}{L_r} \right)^2 \Delta_{i,r} \right\} \\ K_{wL,i} &= \frac{E_s I_y + G_s J}{L_i^2} \left\{ \frac{E_s C_w}{(E_s I_y + G_s J) L_i} (k_i L_i)^4 \sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi}{L_r} \right)^3 \nabla_{i,r} \right. \\ &\quad \left. + (k_i L_i)^2 \sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi}{L_r} \right) \Delta_{i,r} \right\} = K_{L\omega,i} \\ K_{L\beta,i} &= \frac{E_s C_w}{L_i^3} \left\{ (k_i L_i)^4 \sum_{r=1}^n \nabla_{i,r} + \frac{G_s J L_i^2}{E_s C_w} (k_i L_i)^2 \sum_{r=1}^n \Delta_{i,r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_y L_i^2}{C_w} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi}{L_r} \right)^2 \nabla_{i,r} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また、 C 値は減衰係数で、 $C_{w\omega,i} = M_{B,i} C_{B,i}$, $C_{wL,i} = M_{B,i} C_g C_{B,i} = C_{L\omega,i}$, $C_{L\beta,i} = I_{B,i} C_{B,i} \dots\dots\dots (5)$

最後に、 F_i は鉛直強制力 F を一般座標で表わしたものである。図-2に式(2)と同じ振動を生じる機械系等価モデルを示す。 e_g, e_p はせん断中心 S から圆心 G 、載荷点 P の距離とする。

図-1 曲線桁橋のa)断面図 b)平面図

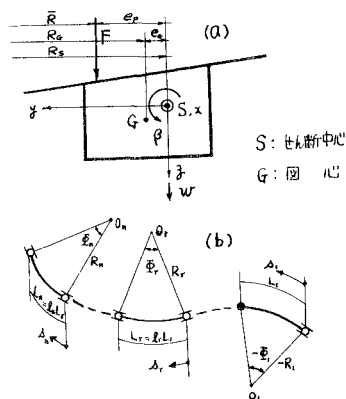
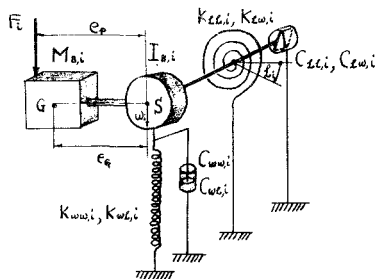


図-2 曲線桁橋の等価振動モデル



3 曲線桁橋の種々な振動について

式(3)・(4)において正規内数 β は、スパン L の単純曲線桁橋の場合、

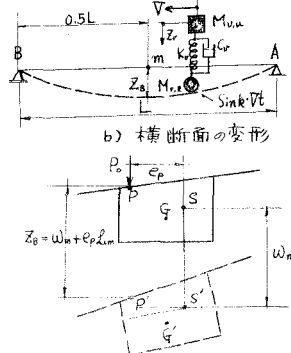
$$\Omega_i = \sin k_i \Delta, (k_i L = i\pi), \text{ 從 } \tau \quad \nabla_i = \Delta i = 1/2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

i) 自由振動：式(2)で $F_i = 0$ …… (7) その結果は文献1)と全く一致する。

ii) 周期力による強制振動：曲率中心から $\bar{R}$ ，桁端から $\Delta = C$ の点に周期力 $P \cdot \sin \omega t$ が作用する。

とき、 $F_i = \bar{R}_i \cdot P_0 \sin \alpha_i \cdot \sin k_i C \dots\dots\dots (8)$

図-3 移動荷重と桁の変形
a) 橋軸方向の変化



iii) 移動荷重によるレスポンス: 図-3に示す質量 $M_v = M_{v,u} + M_{v,d}$, ばね定数 k_v , 減衰係数 c_v とし, 振動荷重の移動するとき, 曲線や橋の振動は, 式(2)で1次のモードのみを考慮すれば,

$$F = \frac{\bar{P}}{R_s} (M_v g + K_v \delta) \sin kVt \dots\dots\dots (9)$$

さらに式(2)の振動と連成して、

$$\left. \begin{aligned} M_{v,u} \ddot{Z}_v + C_v \dot{Z}_v + K_v Z_v &= 0, \\ \dot{Z}_v &= Z_{v0} - (\omega_m + C_{p1} \dots m) \sin k V t \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

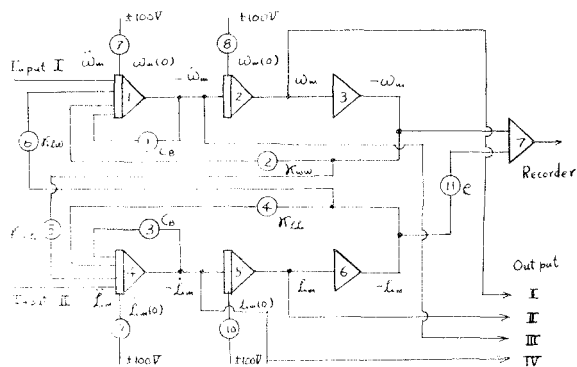
と示す。ここに、 Δ : 移動荷重の絶対変位、 δ : 移動荷重の固有変位、 K : 変位係数、 V : 移動荷重の進行速度、

なお、直線橋橋ごり中が偏に荷重するとき、式(2)、(10)は文献2)の結果と全く一致する。

4 アナログ²⁾計算機による解法³⁾

連立微分方程式(2), (6)の解は普通の方法では困難であるが, アナログ計算機によれば容易である。まず, 一般的な振動とよばれる式(5)をプログラムすれば図-4となる。(係数の具体的な式は略す)

図-4 曲線相移の振動問題のプログラミング



1) 自由振動 : 図 4 で初期値以外の入力は 0 とする.

(ii) 周期力による強制振動：図-4 の入力と図-5 に示す。

iii) 移動荷重によるレスポンス: 図-4の入力を図-6に示す。

以上、必要とする計算結果は、すべてオツシログラフによって記録すればよいが、Scale factorの確定、計算誤差について2、3の問題点を残して置く。

図-5 周期力の場合

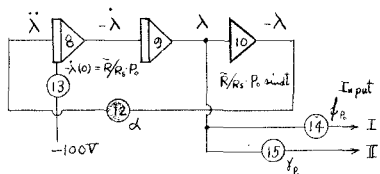
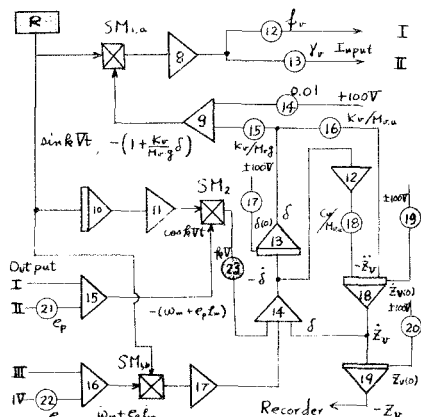


図-6 移動荷重の場合



参考文献 1) 著者: "曲線桁橋の自由振動力に就いて" 1940年2月, 2) Norris, 氏: "Structural Design for Dynamic Load" 59, 3) Fifer "Analogue Computation" 261.