

I-18 2 ヒンジ・アーチの弾塑性たわみ

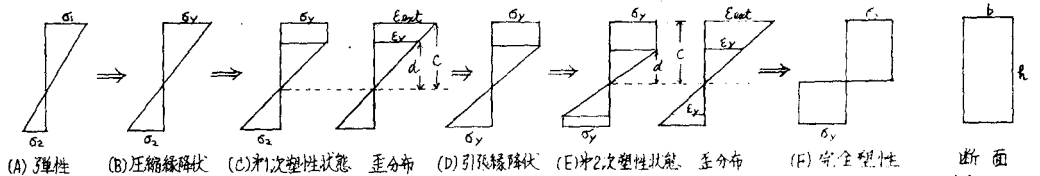
九州大学 工学部 正員 山崎徳也

九州大学大学院 学生員 石川信隆

序 部材に塑性関節が形成されるとたわみが増大し、構造物によってはある限界を越えて使用に耐え得なくなる場合がある。著者等は先に弾塑性領域における曲げモーメントのみを考慮した円弧アーチのたわみ角式⁽¹⁾を補足工不変法により誘導し、弾性解析と同一手法で弾塑性解析を行いうることを示したが、ここでは弾塑性領域における軸方向力の影響⁽²⁾をも取り入れて2ヒンジ円弧アーチを対象とし、弾性曲線法よりたわみ変形を厳密に考察した。矩形等断面を取扱うに用うる仮定は次の如し。(1)内部せん断力の影響を無視する。(2)部材の応力-歪曲線は理想弾塑性とし、履歴効果はないものとする。(3)アーチの歪歪による影響は考慮しない。(4)微小曲率変化を取扱う。

[I] 基本式の誘導

(A)部材断面におけるモーメントと曲率変化との関係 断面が軸方向力(圧縮)と曲げモーメントを受けて弾性から完全塑性まで逐次降伏して行く過程を次の如き応力分布および歪分布で仮定する。(オ1図)



弾性範囲では、円弧アーチ断面における曲率変化を $\Delta\phi$ 、曲げモーメントを M 、曲げ剛性を EI とすれば $\Delta\phi = \frac{M}{EI}$ (1)

塑性範囲では、オ1図(C)および(E)の歪分布より $\Delta\phi = \frac{\epsilon_{ext}}{d} = \frac{\epsilon_y}{d} = \frac{\sigma_y}{E d}$ (2) で与えられる。

オ1図(C)および(E)の応力分布を用い、力の釣合より断面力を求めれば次の如くなる。

すなわち $\alpha = \frac{d}{h}$, $\beta = \frac{c}{h}$, $M_y = \frac{b h^2}{6} \sigma_y$, $N_y = b h \sigma_y$ とすれば、

$$\begin{aligned} \text{オ1次塑性状態では } N &= \frac{N_y}{2\alpha} [2d\beta - d^2 - (1-\beta)^2] \\ M &= M_y \left[3\beta - 3\beta^2 + (3\beta - \frac{3}{2})\alpha - d^2 + \frac{1}{\alpha} (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta^2 + \beta^3) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{オ2次塑性状態では } N = N_y (2\beta - 1), \quad M = M_y (6\beta - 6\beta^2 - 2d^2) \quad (4)$$

また(2)式は $\Delta\phi = \frac{M_y}{EI} \frac{1}{2\alpha} \dots (5)$ とする。ここで $m = \frac{M}{M_y}$, $n = \frac{N}{N_y}$ とおけば

$$(3) \text{式より } 2d = \frac{[3(1-n)-m]^2}{4(1-n)^3} \dots (6a) \quad (4) \text{式より } 2d = \sqrt{3-3n^2-2m} \dots (6b)$$

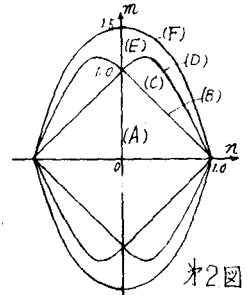
これらを(5)式へ代入すれば各塑性域における曲率変化が定まる。

ここで弾性域とオ1次塑性域との境界条件(オ1図B)は $d = \beta$ で(3)、(6a)式より $m = 1 - n \dots (7a)$

またオ1次塑性域とオ2次塑性域との境界条件(オ1図D)は $d = 1 - \beta$ で(4)、(6b)式より $m = 1 + n - 2n^2 \dots (7b)$

さらにオ2次塑性状態の極限としての完全塑性の場合(オ1図F)は $d = 0$ で(6b)式より $m = \frac{3}{2}(1-n^2) \dots (7c)$

となりこれらの関係をオ2図に示す。

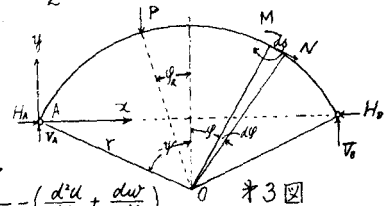


(b)変形の微分方程式 2ヒンジアーチの任意点のモーメントおよび軸力は、

$$M = M' - H y, \quad N = N' + H \cos \varphi \quad (8)$$

ここに M' および N' は単純アーチ梁の荷重による曲げモーメントおよび軸力である。

さて、半径方向および接線方向変位を u, w とすれば、円弧アーチの曲率変化は $\Delta\phi = -(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{dw}{r ds})$ で内力と外力の釣合より(1)、(5)(6)式と(8)式より弾塑性域にわたる微分方程式が求められる。



すなわち 弾性域においては $\frac{d^2 U_0}{d\varphi^2} + U_0 = -m_0 + \frac{3n_0}{K}$, $\frac{dW_0}{d\varphi} = U_0 - \frac{3n_0}{K}$... (9a)

※1次塑性域では $\frac{d^2 U_1}{d\varphi^2} + U_1 = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{3n_1}{K} = -\frac{4(1-n_1)^3}{[3(1-n_1)+m_1]^2} + \frac{3n_1}{K}$, $\frac{dW_1}{d\varphi} = U_1 - \frac{3n_1}{K}$... (9b)

※2次塑性域では $\frac{d^2 U_2}{d\varphi^2} + U_2 = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{3n_2}{K} = -\frac{1}{\sqrt{3-3n_2^2-2m_2}} + \frac{3n_2}{K}$, $\frac{dW_2}{d\varphi} = U_2 - \frac{3n_2}{K}$... (9c)

また前記した m, n は次の値に変る。 $m_i = \frac{1}{M_i} (M' - H \varphi_i)$, $n_i = \frac{1}{N_i} (N' + H \cos \varphi_i)$... (10)

ここで添字記号 i は各応力状態を示す。すなわち 0, 1, 2 はそれぞれ弾性, 1次塑性, 2次塑性のそれと表わし, また

$U_i = \frac{EI}{M_i r} u_i$, $W_i = \frac{EI}{M_i r} w_i$, $K = \frac{r}{k}$, $k = \frac{h}{\delta}$ である。

微分方程式の解 弾塑性境界位置を表わす記号を※4図の如く φ_j ($j=1, 2, 3, \dots$) で示し

$F_i(\varphi) = \frac{1}{2\alpha} - \frac{3n_i}{K}$ ($i=0$ のとき $\frac{1}{2\alpha} = m_0$) とおけば (9) 式の解は一般に次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= A_{ij} \cos \varphi_j + B_{ij} \sin \varphi_j - \int_0^{\varphi_j} F_i(\varphi) \sin(\varphi_j - \varphi) d\varphi \\ W_i &= A_{ij} \sin \varphi_j + B_{ij} (1 - \cos \varphi_j) + C_{ij} - \int_0^{\varphi_j} F_i(\varphi) [1 - \cos(\varphi_j - \varphi)] d\varphi + \int_0^{\varphi_j} \frac{3n_i}{K} d\varphi \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

(各種定数 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} ($i=0, 1, 2$; $j=1, 2, 3, \dots$)) は塑性域が発生する度に, たわみの連続条件および材端条件

すなわち $\varphi = \varphi_j$ のとき $U_0 = U_1$, $W_0 = W_1$, $\frac{dU_0}{d\varphi} = \frac{dU_1}{d\varphi}$ または $U_1 = U_2$, $W_1 = W_2$, $\frac{dW_1}{d\varphi} = \frac{dW_2}{d\varphi}$... (12)

$\varphi = -\psi$ のとき $U_i = 0$, $W_i = 0$, $\varphi = \psi$ のとき $U_i = 0$

より $H = \frac{H}{N_i} = f(P, K, \gamma, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij})$... (13)

すなわち γ とし, 水平反力 H は $\varphi = \psi$ で $W_i = 0$ より $H = \frac{H}{N_i} = f(P, K, \gamma, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij})$... (14) と表わされ,

(14) 式より弾性の場合すなわち (9a) 式を解いた H と V との比 $\gamma = \tan^{-1}(H/V)$... (15) と表わされ,

二 解法

① 任意重による弾性アーチを解き H, V を求め, これを $\gamma = \tan^{-1}(H/V)$ とおけば $\gamma = f(\psi)$ となる。

② ※4図(B)を考へ (7a) 式で初期降伏荷重 P_0 および初期降伏の起る位置 θ_k を弾性的に仮定する。すなわち $P_0 = f(\theta_k, K)$

③ 均等集荷重の場合は一般に荷重変であるが, 分布荷重では $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$ より算出する。

④ 荷重値を P_0 に上げた状態にうつり 弾塑性境界を示す φ_j を (7a), (7b) 式より弾性計算より仮定する。すなわち

$\varphi_j = f(m_0, n_0) = f(\gamma, P, K)$ である。

⑤ この φ_j を (11), (12) 式へ代入して各種定数 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} を算出し (13) 式へ代入して弾塑性域を考慮した水平反力 H をうる。

⑥ H を新たに $\gamma = \tan^{-1}(H/V)$ と置き換え (7a), (7b) へ再び代入して $\varphi_j = f(m_i, n_i) = f(\gamma, P, K)$ を算定し,

⑦ ⑥ の操作を繰返して φ_j を収斂させる。

⑧ ⑦ で得た φ_j を (11) 式へ代入すれば 荷重 P_0 における弾塑性たわみが得られる。

⑨ この荷重を逐次漸増 ($P_0, P_1, \dots$) とせ, ③ ~ ⑧ の操作を繰返して (必要に応じて②をも用いて) ある断面が完全塑性

に達した時の荷重 P_p をもて終る。また任意の荷重 P_n に対しては① ~ ⑧ を行いたわみを算出する。

【例題】(a) 中央集荷重の場合 (※3図 $q_0=0$) 弾塑性範囲における水平反力は (13) 式より $\varphi = \psi$ で $W_0 = 0$ から

$H = \frac{P}{2} \tan \gamma + \frac{B_{0j}(1 - \cos \varphi_j) - C_{0j} \cos \varphi_j}{K V_i}$ であり, B_{0j} および C_{0j} は (12) 式より

決定する。又 V_i は (11) 式の方母を示す。一般に中央荷重変に1次塑性域, 2次

塑性域が発生し, 更に $\theta_k = \frac{\pi}{2} - \gamma$ の両側にそれぞれ1次, 2次塑性域が

発生し最後に中央が完全塑性となる。 θ_k は $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$ より定められる。

(b) 鉛直等分布荷重 (4図) 降伏応力位置 θ_k は $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$ より $\theta_k = \cos^{-1}(\tan \gamma \sin \theta_0 \frac{K-1}{K-2})$

が算定され, 塑性域は θ_k の両側に生じ, 中央に発生する。計算例は講演時に示す。

(文献) (1) 山崎石川 “連続アーチの弾塑性解析” 第19回年次学術講演会講演概要 昭和39年5月

(2) 牧野 総 “弾塑性域における軸方向力を受ける矩形断面部材の研究” 建築学会論文報告集 昭和38年12月

