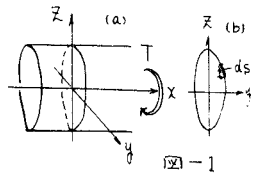


九州大学工学部 正員 山崎 徳也  
学生員 ○ 太田 俊昭

**I 緒言** 一樣断面の棒の弾塑性撓り挙動を撓りの応力函数を用いて把握し、さらに弾塑性領域における撓りモーメントの非線型要素を、補足エネルギー法をもとに線型化することに成功した。この結果、棒に与えられる撓りの補足エネルギーは、弾性のそれと同じく、撓りモーメントの2次函数で与えられ、しかも撓りを伴う弾塑性解析の分野において、従来のエネルギー法に準じた多岐にわたる応用が可能となる。ここではまず矩形断面に対する応力函数を求め、撓りモーメントと撓り角との関係式を誘導し、ついで補足エネルギーの算出を試みた。後述の考察に従えば、任意の断面に対し、撓りの応力函数が求まれば、補足エネルギーは断面の形状の要素を含む形で容易に一般表示出来、本来エネルギー法のもつ一般性をそのまま踏襲したものである。著者等は、別に円形断面に対しても上述の考察を行い、それが可能なことを確かめたが、これについての詳細は紙面の都合上省略する。

**II 理論の誘導** 一樣断面の真直な棒を考え、直交座標を図-1の如く設定する。この棒が  $x$  軸のまわり  $T$  なる撓りモーメントで撓られ、単位長さ当り  $w$  の撓れ曲を生じたとする。平衡条件式は  $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$  (1) 棒の断面の外向き法線  $n$  の方向余弦をそれぞれ  $m, n$  とすれば、境界条件は  $\tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0$  (2) (1)式を満足する応力函数  $\chi$  を考えれば  $\tau_{yx} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}$ ,  $\tau_{zx} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$  と与えられる。断面の周にそつて  $ds$  を取れば  $m = \frac{dz}{ds}$ ,  $n = -\frac{dy}{ds}$  (2)式に代入して  $\frac{d\chi}{ds} = 0$  をえ、これより周上では  $\chi = \chi_0$  (一定) なることを知る。次に撓りモーメント  $T = \int (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) dy dz$  と与えられ、これを Green 函数を用いて変形すれば  $T = 2 \int \chi_0 dy dz + 2\chi_0 F$  となり  $\chi_0 = 0$  とおけば結局次のようになる。  $T = 2 \int \chi dy dz$  (3) 一方せん断ひずみ  $\delta_{yz}$ ,  $\delta_{zx}$  は  $\delta_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} - w z$ ,  $\delta_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = -\frac{\partial u}{\partial z} + w y$  といふ応力函数で置き換え、上記(1)式を  $z$  で、(2)式を  $y$  で偏微分して計算の上変形すれば  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -2wG$  (4) をうる。この式は一樣な単位張力で張られた右鋭膜が上向きの圧力  $2wG$  を受けたときの膜のたわみが、満足条件式に該当し、 $\chi$  はかかる膜のたわみと等しい。短辺  $a$ 、長辺  $b$  の矩形断面を例として  $\chi$  を求めれば、次の如くである。



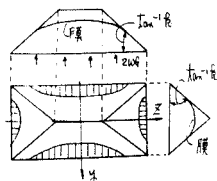
(i) 弾性領域:  $\chi = wG(\frac{a^2}{4} - y^2) - \chi_0$  (5) とすれば、 $y = \pm \frac{a}{2}$  で  $\chi = 0$ ;  $z = \pm \frac{b}{2}$  で  $\chi = wG(\frac{a^2}{4} - y^2)$

なる境界条件と  $\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$  (平衡条件式) から次の如く求められる。  $\chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi y}{a} \cosh \frac{n\pi z}{b}$  かつ  $C_0 = -(1/8)ga^2wG/\pi^2(1+2R) \cosh \pi(1+2R)b/2a$ ,  $a/b \ll 1$  なる細長い矩形の場合には1式は  $\chi = wG(\frac{a^2}{4} - y^2)$  となる。

(ii) 弾塑性領域: 一樣断面の棒が撓られた結果、断面の一部において応力が弾性限度を越え、弾性領域が生じたと仮定する。弾性領域において、ミゼースの降伏条件を考えれば  $\sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = R$  (6) 塑性時の  $\chi$  を弾性の場合と同様  $\tau_{yz} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}$ ,  $\tau_{zx} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$  とおけば、1式は次の如く変形される。

$$\{(\partial \chi / \partial y)^2 + (\partial \chi / \partial z)^2\}^{1/2} = |\text{grad } \chi| = \text{Max } \partial \chi / \partial z = R \quad (1) \text{は } z \text{ 方向を } z \text{ 軸と取る。}$$

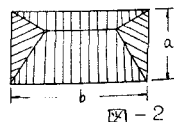
すなわち降伏状態にある所では、 $\chi$  を任意の方向に微分したときの最大値が、常に一定値  $R$  となる。上述の結果と前記理論に適用すれば、 $a \times b$  矩形断面では図-2の如き剛な屋根を設置し、膜が  $2wG$  を受けてたわみ、その一部が屋根に接した状態を考え、接触部分が塑性領域を、残りの部分が弾性領域を示すことになる。その経過は図-3に示されるが、ここで論ずるのは(2)の弾塑性であり、次の如く考察する。応力函数は短辺の近傍を除いて近似的に次の如く求められる。すなわち  $|z| \leq (b-a)/2$  (図-4参照)で



弾性領域 ( $|y| \leq y_0$ )  $\dots \chi_0 = wG(\frac{a^2}{4} - y^2) + C_0$  (7)

塑性領域 ( $y_0 \leq |y| \leq a/2$ )  $\dots \chi_p = \pm R(y - y_0)$  (8)

ここに  $y_0, C_0$  は連続条件よりそれぞれ  $R/2wG$ ,  $-(a-R/2wG)^2/4$  となる。



(3)式に代入し、この部分についての振りE-メント  $T_1$  を算出すれば

$$T_1 = (b-a) \left\{ \int_0^{x_0} x_0 dy + \int_{x_0}^{x_1} x_1 dy \right\} \\ = b(b-a)/2 (a^2 - \frac{1}{3} \omega^2 q^2) \quad \text{--- (9)}$$

次に残りの両端部  $(b-a)/2 \leq |x| \leq b/2$  については、 $w=w_1$

で  $T = T_y$  , また  $w = \omega$  で  $T = T_p$  なる境界条件より

$$T_2 = b \left\{ a/3 - b \frac{1}{2} g(b/a) / 3 \omega^2 q^2 \right\} \quad \text{--- (10)} \quad \text{よて 所要の振りE-メントは}$$

$$T = T_1 + T_2 = b \left\{ (b-a)/2 (a^2 - \frac{1}{3} \omega^2 q^2) + a/3 - b \frac{1}{2} g(b/a) / 3 \omega^2 q^2 \right\} - T_y \{ f - (f-1)(w/\omega)^2 \} \quad \text{--- (11)}$$

ここに  $g(b/a) = 1/2 a / \pi^2 b \tan \pi b / 2a$  ,  $T_y = \frac{1}{2} \sigma_y b \{ 1 - g(b/a) \} / 3$  ,  $T_p = \frac{1}{2} \sigma_y b (b-a) / b$  ,  $f = T_p / T_y$

上式の精度を、厳密な数値解と検討した結果、 $b/a=2$  における最大誤差はわずか5~6%であった。この

誤差は  $b/a$  が増大につれて減少するので、(11)式は  $b/a \geq 2$  の範囲では充分実用的価値があるものと考えられる。

次に  $T/T_y$  を、 $w/\omega$  をパラメータとして図示すれば図-5のごとくなる。一方振りの補足エネルギーは一般に次の

ごとく定義される。  $dU/ds = \int_0^T \omega dT$  弾塑性部の非線型要素に53難点を参照す目的で、

図-5のA~B曲線部をAC直線で置換するか、置換条件としてエネルギー等置<sup>5)</sup>を採用すれば、AC直線の勾配  $1/\kappa_r$  は以下のごとく

決定される。すなわち A~B曲線に關する補足エネルギーを  $W_0$  , AC直線のそれを  $W_1$  とすればそれぞれ

$$W_0 = \int_0^T \omega_0 dT + \int_T^{T_p} \omega_p dT = T_y^2 / 26J + 3(f-1)T_p^2 / 26J = (3f-2)T_y^2 / 26J$$

$$W_1 = \int_0^T \omega_0 dT + \int_T^{T_p} \omega_p dT = \kappa_r (T-T_y)^2 / 26J + 2(T-T_y)T_p / 26J + T_p^2 / 26J = (\kappa_r - 1)(T-T_y)^2 + T_p^2 / 26J + \kappa_r (T-T_y)T_p / 26J$$

$$W_0 = W_1 \quad \text{より} \quad (3f-2)T_y^2 / 26J = \{ (\kappa_r - 1)(f-1)^2 + f^2 \} T_y^2 / 26J \quad \therefore \kappa_r = 1/(f-1) \quad \text{--- (13)}$$

よて AC直線は  $T/T_y - 1 = 1/\kappa_r (w/\omega - 1)$  となる。またこの式を用いて弾塑性領域における

補足エネルギーを算定すれば次のごとくなる。

$$dU/ds = \int_0^T \omega_0 dT + \int_T^{T_p} \omega_p dT = \{ T^2 + \kappa_r' (T-T_y)^2 \} / 26J \quad \text{或いは}$$

$$U = \int_0^T T^2 / 26J ds + \int_T^{T_p} \kappa_r' (T-T_y)^2 / 26J ds \quad \text{--- (14)}$$

ここに  $q$  : せん断弾性係数 ,  $J = a^3 b (1 - g(b/a)) / 3$  ,  $\kappa_r' = \kappa_r - 1$

III 結語 Complementary Minimum Principle を用いて、一般に傾角  $\phi$  は  $\phi = dU/dT$  と

与えられる。この原理の応用の一つとして著者は弾塑性領域を考慮した振り角式を誘導し、円棒のねじり

角式を併用して立体構造の弾塑性解析を可能ならしめた。一方、振り変形が塑性変形まで移行すれば、当然細長い矩形断面(薄肉断面)の棒においては、曲げ振りの作用が大きい。その影響は無視出来ないものと考えられ、かかる現象も、同様に補足エネルギーで容易に捕えられ、これについては後日発表の予定である。

(参考文献)

- (1) A. Nadai : Theory of Flow and Fracture of Solids, Engineering Societies Monographs Volume II
- (2) P. Hodge and W. Prager : A Variational Principles for Plastic Materials with Strain-hardening, J. Math. Phys. 27, 1948
- (3) H. J. Greenberg : Complementary Minimum Principles for an Elastic-Plastic Material, 21pp., 1948
- (4) B. Rawlings : Energy Relationships in Plastic Steel Structures, Trans. ASCE, Vol. 128, 1963
- (5) 山崎, 太田 : 塑性解析に拡張したエネルギー法, 第19回土木学会学術講演会講演概要, 昭和39年5月
- (6) 山崎, 石川 : 弾塑性領域を考慮したエネルギー法による直線材のねじり角式の誘導について, 土木学会西部支部 昭和39年2月
- (7) 山崎, 太田, 連永 : 円中才近似直線を用いた補足エネルギー法について, 第20回土木学会学術講演会講演概要 昭和39年5月

