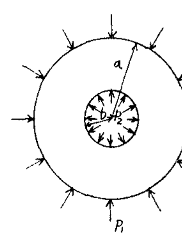
I−13　有孔板の反対称座屈について

九州大学工学部　　正員　　山崎徳也
〃　応用力学研究所　　　熊井豊二
〃　工学部　　　学生員　○後藤恵之輔

(I)緒言　橋梁その他の薄板構造物において桁板に軽減孔その他マンホール等をあける場合、板に加わる種々の外力のために板の座屈による破損が起らないように設計しなければならない。有孔板の座屈荷重および応力の計算は、中心に円孔のある円板の対称座屈については Meissner[1]、その他[2,3]によってすでに研究されている。その結果は周知のとおり、周辺に半径方向の荷重が作用するとき、周辺単純支持の条件においては座屈応力が孔径の増加と共に逐次減少するのであるが、周辺固定のときは孔径と円板の径との比が 0.2 付近において座屈応力は最低値を示し、0.2 以上の孔径では急激に上昇する。有孔円板の直径方向に一つの節を有する、いわゆる反対称座屈の計算は著者等の知るところでは著者の一人が行なった一方向荷重による有孔正方形板の座屈の実験[4]以外には、まだその文献は見当らない。そこで本論では円板の反対称座屈について一計算を試みた。

(II)計算の概要　円板の反対称座屈の基礎方程式は次の如く表わされる。



才1図

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] \text{-----}(1)$$

ここに、w：板の撓み、t：板の厚さ、D：板の曲げ剛性、r,θ：極座標

σ_r, σ_θ：それぞれ r,θ 方向の応力

一般に、中央に孔のある円板に周辺および孔縁に沿うて一様な圧縮力 p_1, p_2 が作用する場合の二次元応力は応力函数から容易に次式の如く導かれる。

$$\sigma_r = -\frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{a^2 - b^2} + \frac{1}{r^2}\frac{(p_1 - p_2)a^2 b^2}{a^2 - b^2},\quad \sigma_\theta = -\frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{a^2 - b^2} - \frac{1}{r^2}\frac{(p_1 - p_2)a^2 b^2}{a^2 - b^2} \text{-----}(2)$$

但し、a, b はそれぞれ円板、円孔の半径とする。

撓みの形を $w = f(r,\theta) = R(r)\cos\theta$ として (2)式を(1)式に代入し整理すれば次式が得られる。但し、本論では $p_2 = 0$ である。

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(\alpha - \frac{1-\beta}{r^2}\right)\right\}\left\{\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{r^2}R\right\} = -\alpha\left(\frac{2b^2}{r^3}\frac{dR}{dr} - \frac{2b^2}{r^4}R\right) \text{---------}(3)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{p_1 a^2 t}{D(a^2 - b^2)},\quad \beta = -\frac{p_1 a^2 b^2 t}{D(a^2 - b^2)}$$

(3)式の右辺を摂動項と考え、才零近似解として右辺を零とおいた場合の解は次のように示される。

$$R_0 = AJ_n(\sqrt{\alpha}r) + BY_n(\sqrt{\alpha}r) + Cr + Er^{-1} \text{-------}(4) \quad \therefore\ w_0 = [AJ_n(\sqrt{\alpha}r) + BY_n(\sqrt{\alpha}r) + Cr + Er^{-1}]\cos\theta \text{----}(5)$$

但し、$n^2 = 1-\beta$ とし、J_n, Y_n はそれぞれ才1種、才2種の Bessel 函数であり、n が整数でないときは Y_n は J_{-n} となる。[5]

有孔円板の孔縁は自由縁とし、周辺単純支持および固定の条件についての固有値決定式を示せば次のようになる。

周辺単純支持：

$$\begin{vmatrix} J_n(\sqrt{\alpha}a) & Y_n(\sqrt{\alpha}a) & 1 & 3/4 \\ F_a & G_a & 0 & 1 \\ F_b & G_b & 0 & 1/\mu \\ H & I & 0 & 1/\mu \end{vmatrix} = 0 \text{---------}(6)$$

但し、$\mu = b/a$

$$F_a = \{(n+1)(n-1/3) - \alpha a^2\}J_n(\sqrt{\alpha}a) - 2/3\sqrt{\alpha}a J_{n-1}(\sqrt{\alpha}a)$$

$$G_a = \{(n+1)(n-1/3) - \alpha a^2\}Y_n(\sqrt{\alpha}a) - 2/3\sqrt{\alpha}a Y_{n-1}(\sqrt{\alpha}a)$$

$$F_b = \{(n+1)(n-1/3) - \alpha b^2\}J_n(\sqrt{\alpha}b) - 2/3\sqrt{\alpha}b J_{n-1}(\sqrt{\alpha}b)$$

$$G_b = \{(n+1)(n-1/3) - \alpha b^2\}Y_n(\sqrt{\alpha}b) - 2/3\sqrt{\alpha}b Y_{n-1}(\sqrt{\alpha}b)$$

$$H = [-(n+1)\{(n-1)(n+2) - 2/3\} + n\alpha b^2]J_n(\sqrt{\alpha}b) + (n^2 - 5/3 - \alpha b^2)\sqrt{\alpha}b J_{n-1}(\sqrt{\alpha}b)$$

$$I = [-(n+1)\{(n-1)(n+2) - 2/3\} + n\alpha b^2]Y_n(\sqrt{\alpha}b) + (n^2 - 5/3 - \alpha b^2)\sqrt{\alpha}b Y_{n-1}(\sqrt{\alpha}b)$$

周辺固定：$\begin{vmatrix} J_n(\sqrt{\alpha}a) & Y_n(\sqrt{\alpha}a) & 1 & 3/4 \\ F_a' & G_a' & 1 & -3/4 \\ F_b & G_b & 0 & 1/\mu \\ H & I & 0 & 1/\mu \end{vmatrix} = 0$ -------- (7)

但し、$F_a' = -n J_n(\sqrt{\alpha}a) + \sqrt{\alpha}a J_{n-1}(\sqrt{\alpha}a)$

$G_a' = -n Y_n(\sqrt{\alpha}a) + \sqrt{\alpha}a Y_{n-1}(\sqrt{\alpha}a)$

μ, F_b, G_b, H, I については周辺単純支持の場合と同じである。

第零近似解の固有値を α_0 とし正解値 α を $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ とすれば修正値 α_1 は次式によって計算される。

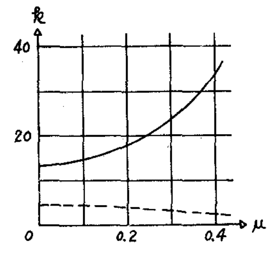
$$\alpha_1 = \frac{\int_b^a \int_0^{2\pi} \alpha_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} \frac{dR_0}{dr} - \frac{2b^2}{r^4} R_0 \right) R_0 \, r dr d\theta}{\int_b^a \int_0^{2\pi} R_0^2 \, r dr d\theta} \quad \text{------} \ (8)$$

ここに R_0 は (4) 式をとる。

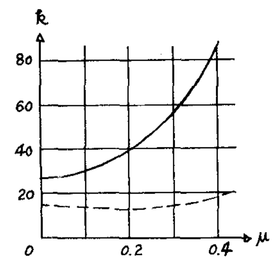
(III) 計算結果　第2図、第3図にそれぞれ周辺単純支持および固定の条件における第零近似計算の座屈応力の値が示してある。図の縦軸 k は次式に示される値である。

$$P_1 = k \frac{D}{a^2 t} \quad \text{-----------} \ (9)$$

図には比較のため Meissner による対称座屈の k の値が点線で付記してある。孔のない場合 ($\mu = 0$) の円板の反対称座屈値は従来の計算値[6]と一致する。また、反対称座屈応力は周辺支持条件の如何にかかわらず計算に取上げた μ の範囲では μ の増加と共に増加する傾向を示す。



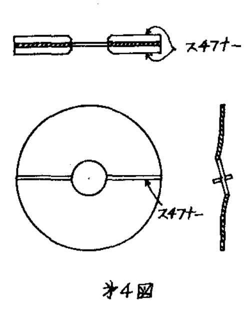
第2図



第3図

攝動項による固有値の修正値の計算は未了である。

(IV) 反対称座屈の効用　一般に有孔円板の孔の大きさは実用的には外径の20～30%程度である。また、種々の外力、例えば面内曲げ、一方向圧縮、あるいは剪断力などのうちで、座屈応力の最小な外力は本計算に示したような半径方向の一様圧縮であって、これは一応代表的な負荷と考えられる。そのような場合、周辺固定の場合を考えると孔の大きさが20～30%程度の有孔板は対称座屈波形においては Meissner の計算に見るように座屈応力は最低値を示す。そこでこの値よりも高い座屈値とするためには第4図に示すように、一直径に簡単なスチフナーを取付ければ座屈波形は反対称となり座屈値を3倍程度に上げることができる。このスチフナーは板の曲げを防ぐためのものであるから、簡単に処理でき軽量な條材で充分である。なお、このスチフナーのある場合には板の反対称座屈のために スチフナーは捩れを受けるがその捩れ剛性はむしろ板の座屈値を更に上げることが予想される。



第4図

(V) 結語　本論は周辺に一様な圧縮を受ける有孔円板の反対称座屈値について、攝動法による第零近似値を計算し対称座屈値と比較したものである。本計算の結果、孔径が20～30%程度では反対称座屈値は対称座屈値より大凡3倍程度大きいことがわかった。実際問題への応用として有孔板の座屈値を上げるためには反対称座屈が起るように工夫すればよい。そのためには、一直径にスチフナーを入れることによって容易にこの目的が達せられることをここに提案する。

攝動項の影響、孔の大きさが比較的大きい場合、および実験検証に関しては更に研究を続ける予定である。

〔参考文献〕 1) E. Meissner：Ueber das Knicken kreisringförmiger Scheiben, 1933　2) 河本実：「中心に円形の孔を有する薄い円盤の安定」機械学会誌 第39巻, 第232号, 昭和11年　3) 岩藤重正：「中心に円孔を有する薄円板の安定」機械学会誌, 第42巻第272号, 昭和14年　4) T. Kumai：Elastic Stability of the Square plate with a Central Circular Hole under Edge Thrust, Reports of Research Institute for Appl. Mech., Kyushu Univ., Vol. I, No. 2, 1952　5) N. W. McLachlan：Bessel Functions for Engineers, P. 157　6) 長柱研究会：弾性安定要覧, P. 424, 昭和35年