I-11 軸力と等分布横荷重を受ける曲線材の座屈について（第三報）

大阪大学 正員 安宅 勝
〃 正員 ○波田凱夫
川崎重工 正員 林 正

軸線形状が任意の空間曲線をなしている曲線材に関する釣合方程式として，Kirchhoff－Clebsch 式[※]があるが，これを利用して，主として曲線材のねじれ座屈の問題を解かんとするものである。

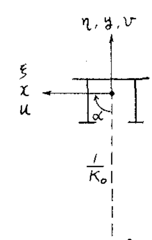
釣合方程式（（ $'=d/ds$ をあらわす）

$$
\begin{aligned}
&Q'_\xi - Q_\eta K_\zeta + Q_\zeta K_\eta + q_\xi(s) = 0 && a) \qquad && M'_\xi + M_\zeta K_\eta - M_\eta K_\zeta - Q_\eta + m_\xi(s) = 0 && d)\\
&Q'_\eta + Q_\xi K_\zeta - Q_\zeta K_\xi + q_\eta(s) = 0 && b) && M'_\eta + M_\xi K_\zeta - M_\zeta K_\xi + Q_\xi + m_\eta(s) = 0 && e) \qquad (1)\\
&Q'_\zeta - Q_\xi K_\eta + Q_\eta K_\xi + q_\zeta(s) = 0 && c) && M'_\zeta - M_\xi K_\eta + M_\eta K_\xi + m_\zeta(s) = 0 && f)
\end{aligned}
$$

ここで取り扱う部材の断面は，軸線の主法線に関し一軸対称であるとし，η 軸の正方向を主法線と逆向きにとる。ζ 軸は，軸線の接線方向にとり，かつ，ξ, η, ζ は右手系直角座標をなすものとする。Q_ξ, Q_η は，それぞれ，ξ, η 軸方向のせん断力，Q_ζ は ζ 軸方向の軸力である。また，M_ξ, M_η, M_ζ はそれぞれ，ξ, η, ζ 軸を右ねじの回転方向にねじるモーメント，q および m は，それぞれの座標軸に関する外力荷重および外力モーメント（単位長あたり）である。K_ξ, K_η はそれぞれ，曲線座標 s 上の接線ベクトルの ξ 軸，η 軸まわりの回転率，K_ζ は，陪法線ベクトルの ζ 軸に関する回転率で，次式であたえられる。

$$
\begin{aligned}
K_\xi &= K_0 \sin\alpha + K_0 \beta \cos\alpha - \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + uT_0 - wK_0\sin\alpha\right) - T_0\left(\frac{du}{ds} - vT_0 + wK_0\cos\alpha\right) - \beta\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds} - vT_0 + wK_0\cos\alpha\right)\\
K_\eta &= K_0 \cos\alpha - K_0 \beta \sin\alpha + \frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds} - vT_0 + wK_0\cos\alpha\right) - T_0\left(\frac{dv}{ds} + uT_0 - wK_0\sin\alpha\right) + \beta\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + uT_0 - wK_0\cos\alpha\right) \qquad (2)\\
K_\zeta &= T_0 + \frac{d\beta}{ds} + K_0\cos\alpha\left(\frac{dv}{ds} + uT_0 - wK_0\sin\alpha\right) + K_0\sin\alpha\left(\frac{du}{ds} - vT_0 + wK_0\cos\alpha\right)\\
&\quad + \left(\frac{dv}{ds} + uT_0 - wK_0\sin\alpha\right)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds} - vT_0 + wK_0\cos\alpha\right)
\end{aligned}
$$

ここに，u, v, w は部材軸上任意点の ξ, η, ζ 方向への変位，β は ζ 軸まわりの回転角である。K_0, T_0 は変形前の部材における主曲率および主ねじり率，α は，主法線と，部材の断面主軸（ここでは ξ 軸）とのなす角である。以上の諸式の他，部材の断面力について次式が成立つ。



$$
\begin{aligned}
&M_\xi = EJ_x(K_\xi - K_{\xi 0}) \ , \qquad M_\eta = EJ_y(K_\eta - K_{\eta 0}) \qquad (3)\\
&M_\zeta = \overline{GI}(K_\zeta - K_{\zeta 0}) - EC_w(K_\zeta - K_{\zeta 0})'' \ , \qquad Q_\zeta = EF\varepsilon
\end{aligned}
$$

ここに，EJ_x, EJ_y は曲げ剛性，$\overline{GI}$ は，部材せんいのねじれによる傾斜を考慮したねじれ剛性，[※※] EC_w は曲げねじれ剛性，F は断面積である。$K_{\xi 0}$ etc. は，変形前の曲率その他をあらわす。また ε は，軸方向のひずみで，次式であたえられる。

※) A.E.H. Love：Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XVIII（微分幾何学的考察によって得られたこれらの諸式は，ベクトル解析を用いることにより，さらに明確に記述せられる。）

※※) $\overline{GI} = GI + Q_\zeta i_p^2 + M_\xi k_x$ （ $i_p^2 = \int_F (x^2+y^2)\,dF / F$ ，$k_x = \int_F y(x^2+y^2)\,dF / J_x$ ）

$$\varepsilon = w' - uK_0\cos\alpha + vK_0\sin\alpha \tag{4}$$

(1),(2),(3),(4) を連立にとくことにより，すべての未知量が決定できる。しかしながら，一般にこれらの諸式は，非線型方程式をあたえるから，たとえ，平面曲線材であっても厳密解を得ることは難しい。平面曲線材においては，その曲率面内での変形と，面外への変形は相互に連成しないとして高次の微小項を省略すれば，基礎方程式は次のように得られる。（この場合 (2)において $T_0 = 0$）

(2)において，$\alpha = 90°$とすれば，v, w が面内での変位をあらわすことになり，(1)〜(4)から，これらに関して次式を得る。

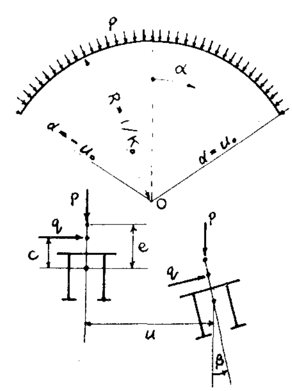
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{EFK_0}\left[EJ_x\left\{(K_0 w)' - v''\right\}\right]'' - w' - vK_0 = -\frac{m_\xi'(s) + q_\eta(s)}{EFK_0}\left\{1 + \frac{v''}{K_0} - \frac{(K_0 w)'}{K_0}\right\} \\
&\frac{1}{K_0}\left\{EF(w' + vK_0)\right\}' + \left[EJ_x\left\{(K_0 w)' - v''\right\}\right]' = -m_\xi(s) - \frac{q_\xi(s)}{K_0}\left\{1 + \frac{v''}{K_0} - \frac{(K_0 w)'}{K_0}\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

ここでもちろん，荷重 m, q 等は，変形後の釣合状態における荷重である。また，軸方向のひずみが無視できる場合には，(4)において $\varepsilon = 0$ とすれば，v と w は独立ではなくなる。

一方，面外への変位 u と，断面の軸線まわりの回転角 β については，部材軸線として断面の図心軸をとり，かつ，図心とせん断中心とのへだたりを y_M（η 軸方向を正）としてこれを考慮にいれるとき次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\left[EJ_y\left\{u'' - (y_M\beta)'' - \beta K_\xi\right\}\right]'' - \left[K_\xi\left\{\overline{GI}(\beta' + u'K_\xi) - EC_w(\beta' + u'K_\xi)'' + Q_\xi y_M\right\}\right]' + \left\{M_\xi(\beta' + u'K_\xi)\right\}' \\
&\qquad + M_\xi'(\beta' + u'K_\xi) - Q_\xi\left\{u'' - (y_M\beta)'' - \beta K_\xi\right\} = q_\xi(s) - m_\zeta(s)(\beta' + u'K_\xi) - m_\eta'(s) \\
&\left\{\overline{GI}(\beta' + u'K_\xi) - EC_w(\beta' + u'K_\xi)'' + Q_\xi y_M\right\}' + K_\xi EJ_y\left\{u'' - (y_M\beta)'' - \beta K_\xi\right\} - M_\xi\left\{u'' - (y_M\beta)'' - \beta K_\xi\right\} = -m_\zeta(s) \\
&Q_\xi = -\left[EJ_y\left\{u'' - (y_M\beta)'' - \beta K_\xi\right\}\right]' - M_\xi(\beta' + u'K_\xi) + K_\xi\left\{\overline{GI}(\beta' + u'K_\xi) - EC_w(\beta' + u'K_\xi)''\right\} - m_\eta(s)
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで K_ξ は，変形を生じた後の軸線面内の曲率であり，(2)と(5)から得られるものであるが，微小変位を仮定するときは，K_0 が用いられる。



（例） $Q_\zeta = -N = -pR$ (Const)，$M_\xi \doteqdot 0$，$m_\zeta = pe\beta - qc$，$K_\xi \doteqdot K_0 = 1/R$

$q_\xi = -p\beta + q$，かつ断面は一定とすると(6)より（$(\ )' = d/d\alpha$）

$$\left.\begin{aligned}
&-(1+n)u'''' + \left\{m - (k_0+1)\alpha_K\right\}u'' + (\nu_0 - n)R\beta'''' + \left\{m + 1 - (k_0 - \nu_0)\alpha_K\right\}R\beta'' = R\lambda_K \\
&-(n+\nu_0)u'''' + (m + 1 - k_0\alpha_K)u'' - (n - \nu_0^2)R\beta'''' + (m - k_0\alpha_K)R\beta'' + (\bar{e}\alpha_K - 1)R\beta = \bar{c}R\lambda_K
\end{aligned}\right\}$$

ここに，$m = GI/EJ_y$，$n = C_w/R^2J_y$，$k_0 = i_p^2/R^2$，$\nu_0 = y_M/R$，$\alpha_K = NR^2/EJ_y$，$\bar{e} = e/R$，$\bar{c} = c/R$，$\lambda_K = qR^3/EJ_y$ である。一般解は，特性方程式の根を k_i（>0，$i = 1,2,3$）とし，かつ β, u の対称性を考慮するとき

$$\left.\begin{aligned}
u &= C_0 + K_1C_1\cosh k_1\alpha + K_2C_2\cosh k_2\alpha + K_3C_3\cosh k_3\alpha + P_1\alpha^2 \\
\beta &= C_1\cosh k_1\alpha + C_2\cosh k_2\alpha + C_3\cosh k_3\alpha + P_2
\end{aligned}\right\}$$

ここに，$K_i = -R\left\{k_i^2(\nu_0 - n) + (m + 1 - k_0\alpha_K - \nu_0\alpha_K)\right\}/\left\{-k_i^2(1+n) + (m - k_0\alpha_K - \alpha_K)\right\}$，$P_1 = -\lambda_K R/2\left\{m - (k_0+1)\alpha_K\right\}$，$P_2 = \lambda_K\left\{\bar{c}(m - k_0\alpha_K - \alpha_K) - (m + 1 - k_0\alpha_K)\right\}/\left\{m - (k_0+1)\alpha_K\right\}(\bar{e}\alpha_K - 1)$ である。さらに複雑な荷重を受ける場合には，(6)を一般的に解くことは極めて困難となるが，かゝる場合には，適当な近似解法を用いればよい。Galerkin法等が特に有効である。また応力問題としての解法を用いることによって，限界の座屈応力度を計算することができる。