

電力中央研究所 正員 色部 誠

○正員 高野 博

要旨、週期的に変化する温度場における無限長板および無限長中空円筒の週期的熱応力について、壁厚が薄い場合、この兩者の間にどの程度の近似度が得られるかは明らかにされていない。ここでは、コンクリート構造物を対象として、これの吟味を行つてみた。

記号、 $x$  : 板内点の座標、 $\ell$  : 板厚、 $a$  : 円筒の外半径、 $b$  : 円筒の内半径、 $r$  : 円筒壁内点の半径、 $\kappa$  : 熱拡散率、 $\alpha$  : 線膨張係数、 $\nu$  : ポアソン比、 $E$  : 弾性係数、 $\tau$  : 時間、 $t$  : 壁内点の温度、 $t_a$  : 境界温度の振幅、 $F$  : フーリエ数、 $\bar{t} = t/t_a$ 、 $\bar{A}$  :  $\bar{t}$  の振幅、 $\bar{\phi}$  :  $\bar{t}$  の位相差、 $\sigma_\theta$  : 円筒の接線方向熱応力、 $\bar{\sigma} = \sigma / (\alpha \cdot E \cdot t_a / (1 - \nu))$ 、 $\bar{A}_\sigma$  :  $\bar{\sigma}_\theta$  の振幅、 $\bar{\phi}_\sigma$  :  $\bar{\sigma}_\theta$  の位相差、

温度、温度分布を求めるにあたり、板および円筒材料の熱的性質は温度によつて変化しないものとし、初期温度は  $0^\circ\text{C}$ 、時刻  $\tau > 0$  で一方の境界温度は  $t_a \sin \omega \tau$ 、他方の境界温度は  $0^\circ\text{C}$  に保たれるものとした。板壁内の温度分布は、H. S. Carslaw が示した式によつて求めたので式の記述を省略する。中空円筒の温度分布は、ここでは、有限 Hankel 変換を用いて解を得た。

中空円筒の温度分布

中空円筒の温度分布は、
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \kappa \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

の微分方程式を満足する解によつて求められる。いま、 $J_0(\xi_i b) G_0(\xi_i a) - J_0(\xi_i a) G_0(\xi_i b) = 0$

の超越関数の根を  $\xi_i$  とすると、 $b \leq r \leq a$  において、(1) 式に有限 Hankel 変換を用いると、(1) 式は

$$\frac{d t_n}{d \tau} = \kappa \left\{ -\frac{2}{\pi} \left( \frac{J_0(\xi_i a)}{J_0(\xi_i b)} \right) t(b) - t(a) - \xi_i^2 t_n \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $t_n = \int_b^a t \cdot r (J_0(\xi_i r) G_0(\xi_i a) - J_0(\xi_i a) G_0(\xi_i r)) dr$  である。いま、境界条件を case 1 : 外壁面温度  $t(a) = t_a \sin \omega \tau$ 、内壁面温度  $t(b) = 0$ 、case 2 :  $t(a) = 0$ 、 $t(b) = t_a \sin \omega \tau$  とすると

case 1 : (2) 式に所与の条件を代入し、その解を得、さらに、その逆変換を行つて Duhamel 積分を行つと、壁内点の温度は、

$$t = -\pi \cdot t_a \sum_i \frac{J_0^2(\xi_i b)}{J_0^2(\xi_i a) - J_0^2(\xi_i b)} \{ J_0(\xi_i r) G_0(\xi_i a) - J_0(\xi_i a) G_0(\xi_i r) \} \cdot f(\xi_i, \tau)$$

ここに、 $f(\xi_i, \tau) = \left( \frac{\kappa \xi_i^2}{\omega} \right) \{ \cos \omega \tau - \frac{\kappa \xi_i^2}{\omega} \sin \omega \tau \} / \{ 1 + \left( \frac{\kappa \xi_i^2}{\omega} \right)^2 \}$

$\bar{r} = r/b$ 、 $k = a/b$ 、 $\bar{\xi}_i = \xi_i b$ 、境界温度の週期を  $T$  とし、 $\bar{\tau} = \tau/T$  とおくと、

$$\bar{A} = (\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (3) \quad \bar{\phi} = \tan^{-1} (-\bar{\phi}_1 / \bar{\phi}_2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\bar{\phi}_1 = -\pi \sum_i \frac{\left( \frac{k-1}{2\pi\bar{\tau}} \right)^2 \bar{\xi}_i^2 F}{1 + \left( \frac{k-1}{2\pi\bar{\tau}} \right)^2 \bar{\xi}_i^2 F^2} \frac{J_0^2(\bar{\xi}_i) \{ J_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) G_0(\bar{\xi}_i k) - J_0(\bar{\xi}_i k) G_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) \}}{J_0^2(\bar{\xi}_i k) - J_0^2(\bar{\xi}_i)}$$

$$\bar{\phi}_2 = -\pi \sum_i \frac{\left( \frac{k-1}{2\pi\bar{\tau}} \right)^2 \bar{\xi}_i^2 F^2}{1 + \left( \frac{k-1}{2\pi\bar{\tau}} \right)^2 \bar{\xi}_i^2 F^2} \frac{J_0^2(\bar{\xi}_i) \{ J_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) G_0(\bar{\xi}_i k) - J_0(\bar{\xi}_i k) G_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) \}}{J_0^2(\bar{\xi}_i k) - J_0^2(\bar{\xi}_i)}$$

case 2 :

$$\bar{\phi}_1 = \pi \sum_i \frac{\frac{(k-1)^2}{2\pi\bar{r}} \bar{\xi}_i^2 F}{1 + \left\{ \frac{(k-1)^2}{2\pi\bar{r}} \bar{\xi}_i^2 F \right\}^2} \frac{J_0(\bar{\xi}_i) J_0(\bar{\xi}_i k) \{ J_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) G_0(\bar{\xi}_i k) - J_0(\bar{\xi}_i k) G_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) \}}{J_0^2(\bar{\xi}_i k) - J_0^2(\bar{\xi}_i)}$$

$$\bar{\phi}_2 = \pi \sum_i \frac{\left\{ \frac{(k-1)^2}{2\pi\bar{r}} \bar{\xi}_i^2 F \right\}^2}{1 + \left\{ \frac{(k-1)^2}{2\pi\bar{r}} \bar{\xi}_i^2 F \right\}^2} \frac{J_0(\bar{\xi}_i^2) J_0(\bar{\xi}_i k) \{ J_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) G_0(\bar{\xi}_i k) - J_0(\bar{\xi}_i k) G_0(\bar{\xi}_i \bar{r}) \}}{J_0^2(\bar{\xi}_i k) - J_0^2(\bar{\xi}_i)}$$

となり、 $\bar{A}$ および $\phi$ は(3)、(4)式に上記の $\bar{\phi}_1$ および $\bar{\phi}_2$ を代入することによつて求められる。

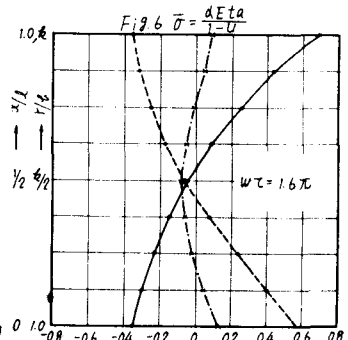
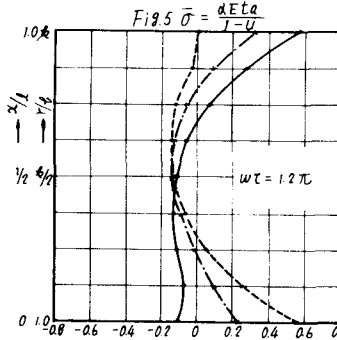
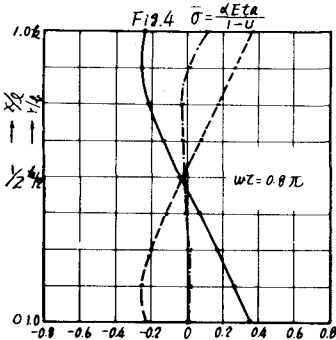
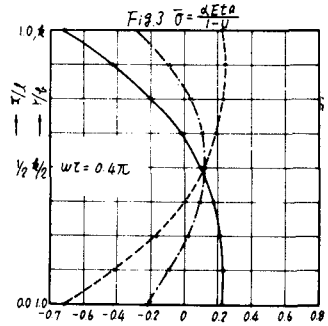
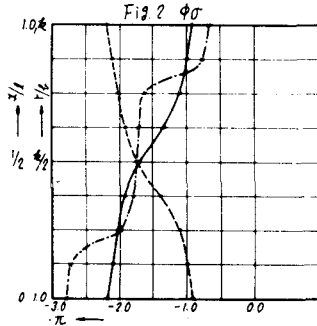
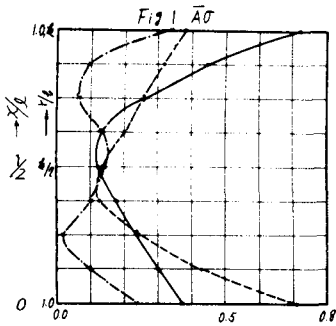
熱応力、熱応力の振巾を $\bar{A}_0$ 。境界温度の変動に対する位相差を $\phi_0$ とすると、

$$\bar{\sigma} = \bar{A}_0 \sin(\omega\tau + \phi_0) = \bar{\sigma}_1 \sin \phi_0 + \bar{\sigma}_2 \cos \phi_0$$

とおくと、 $\bar{\sigma}_1$ は $\omega\tau=0$  なるときの温度 $t$ による熱応力、 $\bar{\sigma}_2$ は $\omega\tau=\pi/2$  なるときの温度 $t$ による熱応力であり、 $\bar{A}_0$ および $\phi_0$ は、 $\bar{A}_0 = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^{1/2}$ 、 $\phi_0 = \tan^{-1}(\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_2)$ により求められる。

以上の計算は、すべてIBM7090により、板および円筒壁を16等分して温度 $t$ を求め、熱応力はシンプソン積分により8等分点で求めた。以下に $F = 1 \times 10^{-3}$  について、 $k = 1.025$ の円筒の接線方向熱応力 $\bar{\sigma}_\theta$ と板の $\bar{\sigma}_r$ を対比して図示した。(●●● 円筒 case 1, ○○○ 円筒 case 2, ××× 板)

板および円筒の温度については、振巾および位相差に大差がないが、熱応力については図から明らかなように、その振巾、位相差および分布に著しい差異がある。



- 参考文献 (1) H. S. Carslaw Conduction of Heat in Solids.  
 (2) I. N. Sneddon Fourier Transforms.  
 (3) Timoshenko Theory of Elasticity.