IV−103 Helixを導線とするノリ面の図形的性質について

防衛大学校　正員　○畠山　正
〃　〃　池内正幸

一定のコウ配I（水平傾角α）をもつ曲線路線（曲線半径a）を設定するとき，その曲線区間を構築する盛土あるいは切取のノリ面は、Helixを導線とする線織面の土木工学における一つの応用例である。Helical convoluteの直線面素の水平傾角αはみな等しい。したがってHelix上の点を頂点とし、底角をαとする円錐の包絡する面である。同様に底角βの盛土あるいは切取のノリ面はHelix上の点を頂点とした底角βの円錐の包絡する面である。しかしこのようなノリ面を現場で施工する場合，近似的に、曲線の半径方向に水平傾角βをもつ母線の線織面が用いられている。この施工されたノリ面の図形的性質について研究した結果を報告する。

Helixの式は曲線長vを媒介変数として

$$x = f(v) = a\cos\frac{v\cos\alpha}{a},\quad y = g(v) = a\cos\frac{v\cos\alpha}{a},\quad z = h(v) = v\sin\alpha \quad \cdots (1)$$

母線の方向余弦は
$$p(v) = \cos\beta\cos\frac{v\cos\alpha}{a},\quad q(v) = \cos\beta\sin\frac{v\cos\alpha}{a},\quad r(v) = -\sin\beta \quad \cdots (2)$$

したがってノリ面の方程式は曲線長v，母線上vよりの長さuを媒介変数として，

$$x = (a+u\cos\beta)\cos\frac{v\cos\alpha}{a},\quad y = (a+u\cos\beta)\sin\frac{v\cos\alpha}{a},\quad z = v\sin\alpha - u\sin\beta \quad \cdots (3)$$

導線と母線との交角ϕは，　$\cos\phi = -\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots (4)$

線素dsは　$ds^2 = du^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\,du\,dv + \left(\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{a^2}u^2 + 2u\frac{\cos^2\alpha\cos\beta}{a} + 1\right)dv^2 \cdots (5)$

等高線は(3)において$z = const$によって求められる。すなわち

$$x = (a + v\sin\alpha\cot\beta)\cos\frac{v\cos\alpha}{a},\quad y = (a + v\sin\alpha\cot\beta)\sin\frac{v\cos\alpha}{a} \quad \cdots (6)$$

次に近接する母線の共通垂線について考える。近接する母線をそれぞれv，$v+\delta v$に対応するものとする。その方向余弦をp，q，r，$p+\delta p$，$q+\delta q$，$r+\delta r$で表わす。共通垂線の方向余弦をλ，μ，νとすれば

$$p\lambda + q\mu + r\nu = 0,\quad (p+\delta p)\lambda + (q+\delta q)\mu + (r+\delta r)\nu = 0$$

従って　$\lambda:\mu:\nu = q\delta r - r\delta q : r\delta p - p\delta r : p\delta q - q\delta p$　である。

さて　$[q(v)r'(v) - q'(v)r(v)]^2 + [r(v)p'(v) - r'(v)p(v)]^2 + [p(v)q'(v) - p'(v)q(v)]^2$
$= [p'(v)^2 + q'(v)^2 + r'(v)^2]$　これをA^2とおくと

$$\lambda = \frac{1}{A}(qr' - q'r) + \varepsilon_1,\quad \mu = \frac{1}{A}(rp' - pr') + \varepsilon_2,\quad \nu = \frac{1}{A}(pq' - p'q) + \varepsilon_3$$

ここでε_1，ε_2，ε_3はδvに関し少くとも1次の無限小とする。近接母線と共通垂線と

の交点の座標をそれぞれ $\bar{x}$, $\bar{x}+\delta\bar{x}$, ・・・ とすれば共通垂線の長さ Δ は

$$\Delta = \frac{\delta\bar{x}}{\lambda} = \frac{\delta\bar{y}}{\mu} = \frac{\delta\bar{z}}{\nu}, \qquad \Delta = \lambda\delta\bar{x} + \mu\,\delta\bar{y} + \nu\,\delta\bar{z}$$

母線上の1点 v より $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ までの距離を $\bar{u}$, $v+\delta v$ より $(\bar{x}+\delta\bar{x}, \cdots)$ までの距離を $\bar{u}+\delta\bar{u}$ とすれば

$$\delta\bar{x} = \{f'(v) + \bar{u}p'(v)\}\delta v + p(v)\delta\bar{u} + \sigma_1, \qquad \delta\bar{y} = \{g'(v) + \bar{u}q'(v)\}dv + q(v)\delta\bar{u} + \sigma_2,$$

$$\delta\bar{z} = \{h'(v) + \bar{u}r'(v)\}\delta v + r(v)\delta\bar{u} + \sigma_3$$

である。こゝで σ_1, σ_2, σ_3 は δv に関して少くとも2次の無限小とする。従って Δ は

$$\Delta = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} f'(v) & g'(v) & h'(v) \\ p(v) & q(v) & r(v) \\ p'(v) & q'(v) & r'(v) \end{vmatrix}\delta v + \varepsilon\delta v = P\delta v + \varepsilon\delta v \qquad \cdots(7)$$

こゝで ε は δv に関し少くとも1次の無限小であるとする。

$$P^2 = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi & B \\ \cos\phi & 1 & 0 \\ B & 0 & A^2 \end{vmatrix} = \frac{A^2\sin^2\phi - B^2}{A^2} \qquad \cdots(8)$$

$$A^2 = \frac{\cos^2\alpha\,\cos^2\beta}{a^2}, \qquad B = \frac{\cos^2\alpha\,\cos\beta}{a}, \qquad \sin^2\phi = 1 - \sin^2\alpha\,\sin^2\beta$$

故に $P = \sin\alpha\cos\beta$ $\cdots(9)$

従って, $\alpha = 0$ 又は $\beta = \frac{\pi}{2}$ を除いては $P \neq 0$ であり、ノリ面はねじれ面である。このノリ面のコウ配は、母線の水平傾角ではなく、面内の各点における切平面の水平傾角によって求めなければならない。

切平面 ξ, η, ζ を変座標として次式で示される。

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \qquad \cdots(10)$$

こゝで

$$A = \sin\alpha\cos\beta\sin\frac{v\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\alpha}{a}\sin\beta(a+u\cos\beta)\cos\frac{v\cos\alpha}{a}, \quad B = \frac{\cos\alpha}{a}\sin\beta(a+u\cos\beta)\sin\frac{v\cos\alpha}{a} - \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{v\cos\alpha}{a}$$

$$C = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a}(a+u\cos\beta), \quad D = (a+u\cos\beta)\left\{(a+u\cos\beta)\sin\frac{v\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a}(v\sin\alpha - u\cos\beta)\right\}$$

切平面の水平傾角 ψ は $\quad \cos\psi = \dfrac{\cos\beta(a+u\cos\beta)}{\sqrt{a^2 + \tan^2\alpha\cos^2\beta + (a+u\cos\beta)}}$ $\cdots(11)$

したがってノリ面の各点におけるコウ配 $\tan\psi$ は

$$\tan\psi = \sqrt{\tan^2\beta - \frac{a^2\tan^2\alpha}{(a+u\cos\beta)^2}} \qquad \cdots(12)$$

指定されたノリ面のコウ配 $\tan\beta$ との誤差 e は

$$e = \frac{\tan\beta - \tan\psi}{\tan\beta} \fallingdotseq \frac{1}{2}\,\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} \qquad \cdots(13)$$

以上の結果から、1) 施工されたノリ面はねじれ面である。 2) コウ配の誤差は危険側にあり、殊にノリコウ配を小さくとる必要のある材料の場合に大きくなることがいえる。