IV-102 コウ配円錐を包絡するノリ面の展開について

防衛大学校　正員　畠山 正
〃　〃　○池内正幸

一般に展開可能な曲面は，錐面，柱面，および類似ねじれ面に限るとされている。しかし，コウ配をもつ路線の曲線部を盛土あるいは切取によつて構築するときに設計されるノリ面は，これら3種の曲面に属さないが展開可能な曲面である。ここでそのノリ面の幾何学的性質および展開法について述べる。

曲線半径 a，コウ配 $I=\tan\alpha$ をもつ路線は，$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=atI$ で示される。これを路線長 v を媒介変数として示せば，

$$x=f(v)=a\cos\frac{v\cos\alpha}{a}\ ,\quad y=g(v)=a\sin\frac{v\cos\alpha}{a}\ ,\quad z=h(v)=v\sin\alpha \qquad\cdots(1)$$

この曲線の曲率半径 R およびねじれ率半径 ρ は，

$$R=\frac{1}{\sqrt{f''(v)^2+g''(v)^2+h''(v)^2}}=a\sec^2\alpha\ ,\quad \rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2}}=a\sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha \qquad\cdots(2)$$

ここで λ，μ，ν は従法線の方向余弦である。

この路線を構築するコウ配 $i=\tan\beta$ のノリ面は，この曲線上の点を頂点とする底角βの円錐（コウ配円錐）の包絡面である。このノリ面の等高線は，コウ配円錐を水平面で切断した断面の包絡線となる。ξ，η を変座標とすれば，断面 F は，

$$F(\xi,\eta,t)=(\xi-a\cos t)^2+(\eta-a\sin t)^2-(atI/i)^2=0$$

$\partial F/\partial t=0$ を求め，$F=0$ に代入すれば，

$$\xi=a\cos t+at(I^2/i^2)\sin t+at(I/i)\sqrt{1-(I^2/i^2)}\cdot\cos t$$
$$\eta=a\sin t-at(I^2/i^2)\cos t+at(I/i)\sqrt{1-(I^2/i^2)}\cdot\sin t$$

$\cos\varphi=I/i$ とおけば，等高線は，

$$\xi=a\cos t+at\cos\varphi\sin(t+\varphi),\quad \eta=a\sin t-at\cos\varphi\cos(t+\varphi) \qquad\cdots(3)$$

ノリ面を構成する母線の方向余弦 p，q，r は，

$$p=\cos\beta\sin(t+\varphi)\ ,\quad q=-\cos\beta\cos(t+\varphi)\ ,\quad r=-\sin\beta \qquad\cdots(4)$$

従ってノリ面の方程式は導線の長さ v，導線より母線に沿った長さ u を媒介変数として，

$$x=a\cos\frac{v\cos\alpha}{a}+u\cos\beta\sin\left(\frac{v\cos\alpha}{a}+\varphi\right),\quad y=a\sin\frac{v\cos\alpha}{a}-u\cos\beta\cos\left(\frac{v\cos\alpha}{a}+\varphi\right),$$

$$z=v\sin\alpha-u\sin\beta \qquad\cdots(5)$$

導線と母線との交角 ϕ は，

$$\cos\phi=-\sin\alpha/\sin\beta \qquad\cdots(6)$$

面の線素 ds は，

$$ds=du^2-2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}du\,dv+\left(\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{a^2}u+2u\frac{\cos^2\alpha\cos\beta}{a}\sin\varphi+1\right)dv^2 \qquad\cdots(7)$$

近接する2母線の共通垂線の長さ Δは,

$$\Delta=\frac{1}{A}\begin{vmatrix} f'(v) & g'(v) & h'(v) \\ p(v) & q(v) & r(v) \\ p'(v) & q'(v) & r'(v) \end{vmatrix}\delta v+\varepsilon\delta v = \mathrm{P}\delta v+\varepsilon\delta v \qquad \cdots(8)$$

ここで ε は δv に関して少くとも一次の無限小であるとする。

$$\mathrm{P}^2=\frac{A^2\sin^2\phi-B^2}{A^2},\quad A^2=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{a^2},\quad B=\frac{\cos^2\alpha\cos\beta}{a}\sin\varphi,\quad \sin^2\phi=1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} \qquad \cdots(9)$$

故に $\mathrm{P}\equiv 0$ 。従ってこのノリ面は展開可能な曲面である。

次に展開について述べる。ノリ面を円柱座標で表わせば,

$$\begin{aligned} x &= a\cos t+(at\cos\varphi-z\cot\beta)\sin(t+\varphi) \\ y &= a\sin t-(at\cos\varphi-z\cot\beta)\cos(t+\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \qquad \cdots(10)$$

このノリ面を ξη 平面の同じ媒介変数の値に対応させるとき,等角写像を生ずるための必要かつ充分な条件は,ノリ面の第1種の基礎量を E, F, G, ξη 平面のそれを $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ とするとき

$$\frac{E}{\overline{E}}=\frac{F}{\overline{F}}=\frac{G}{\overline{G}} \qquad \cdots(11)$$

$$E=(at\cos\varphi+a\sin\varphi-z\cot\beta)^2,\quad F=0,\quad G=\mathrm{cosec}^2\beta \qquad \cdots(12)$$

$$ds^2=E\,dt^2+2F\,dt\,dz+G\,dz^2=(\sqrt{E}\,dt+i\sqrt{G}\,dz)(\sqrt{E}\,dt-i\sqrt{G}\,dz)$$

そこで $dA=\mu(\sqrt{E}\,dt)$, $dB=\mu(\sqrt{G}\,dz)$ とおき,積分因子として,

$$\mu=\cos(t\cos\beta+\phi) \qquad \cdots(13)$$

とおけば

$$\begin{aligned} A &= a\sec\alpha\sec\beta\cos(t\cos\beta)+(at\tan\alpha\,\mathrm{cosec}\beta-z\,\mathrm{cosec}\beta)\sin(t\cos\beta+\phi) \\ B &= z\,\mathrm{cosec}\beta\,(t\cos\beta+\phi) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} \xi &= a\sec\alpha\sec\beta\cos(t\cos\beta)+(at\tan\alpha\,\mathrm{cosec}\beta-z\,\mathrm{cosec}\beta)\sin(t\cos\beta+\phi) \\ \eta &= a\sec\alpha\sec\beta\sin(t\cos\beta)-(at\tan\alpha\,\mathrm{cosec}\beta-z\,\mathrm{cosec}\beta)\cos(t\cos\beta+\phi) \end{aligned} \qquad \cdots(14)$$

とおけば (14) は (11) を満足する。

従って,(14) は ξη 平面に展開されたノリ面の式となる。展開図において導線は半径 $R=a\sec\alpha\sec\beta$ の円弧となる。右に展開図の作図法を示す。

以上の結果から,Helix を導線とした展開可能な曲面は,Helical convolute に限らないことがいえる。