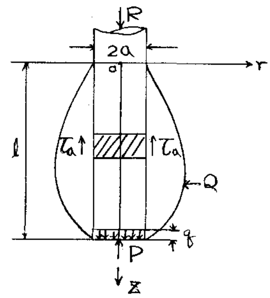
III—71 杭の初期沈下の一計算法

正員 金沢大学工学部 西田義親
西松建設 高木六郎
大阪市 藤井昌弘

杭の支持力については多くの発表があるが一方沈下の問題は山肩氏の研究の他にあまりみられない。昨年度、筆者はその計算の一段階として摩擦杭の沈下の近似的な計算法を述べたが、今回は杭先の支持抵抗も併せ考えた杭の沈下の近似的な計算法を述べる。杭は地盤に鉛直に打ち込まれているものとする。杭の鉛直方向の変位 w_p，土と杭との間の摩擦応力 τ_a との間には



$$\frac{d^2 w_p}{dz^2} = \frac{2\tau_a}{a E_p} \quad , \quad E_p:\text{杭の弾性係数} \tag{1}$$

他に適当な方法がないから地盤を弾性係数 E，ポアソン比 $1/m$ なる弾性体とみなし 地表と遠方で自然の状態に一致するようにという条件で円柱座標 (r, t, z) を用いると地盤内の剪断応力 τ と鉛直方向の土の変位 w_s は

$$\tau = -\sum \frac{mE}{m+1} G K_1(kr)\, z \sin kz \tag{2}$$

$$w_s = \sum G \frac{1}{k} K_0(kr) \left\{ \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{k} \cos kz + z \sin kz \right\} \tag{3}$$

になる。G，k は常数で $K_1(kr)$，$K_0(kr)$ は変形ベッセル函数である。式(2)で $r=a$ としたものが側面摩擦でこれを式(1)に代入して積分する。次に非常に大きな仮定であって、理論的に議論の余地が多いが杭の側面と土との変位関係は無視して 杭が土に比べて剛体のときはその沈下は杭底面附近の土の沈下 即ち $r=a$ $z=l$ のとき式(3)で示される w_s に等しいと考えて積分常数をきめると

$$w_p = \frac{E}{aE_p} \cdot \frac{mE}{m+1} \sum G \cdot K_1(ka) \left\{ \frac{2}{k^3} \cos kz + \frac{1}{k^2} z \cdot \sin kz \right\} + \sum G \frac{K_0(ka)}{k} \left\{ \frac{2(m-1)}{m} \cdot \frac{1}{k} \cos kl + l \sin kl \right\} \tag{4}$$

一方側面摩擦の総計 Q を計算すると

$$Q = 2\pi a \int_0^l \tau_{r=a}\, dz = 2\pi a \frac{mE}{m+1} \sum G \frac{K_1(ka)}{k} \left\{ \frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl \right\} \tag{5}$$

計算を容易にするため G は k に無関係な常数と仮定して式(5)を用いて式(4)を書き換えた後、杭頭の沈下を求めるため $z=0$ とおくと次の形が得られる。

$$w_{p(z=0)} = \frac{Q}{2\pi a} \cdot \frac{1}{E} \left(\frac{E}{E_p} x_1 + x_2 \right) \tag{6}$$

$kl = \alpha$ として x_1，x_2 は

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-\frac{4l}{a} \sum \frac{1}{\alpha} K_1(ka)}{\sum K_1(ka) \left(\frac{1}{\alpha^2} \sin\alpha - \frac{1}{\alpha} \cos\alpha \right)} \\ x_2 &= \frac{\sum K_0(ka) \left[\frac{2(m^2-1)}{m^2} \times \frac{1}{\alpha^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{\alpha} \sin\alpha \right]}{\sum K_1(ka) \left[\frac{1}{\alpha^2} \sin\alpha - \frac{1}{\alpha} \cos\alpha \right]} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

次に杭底面の反力を求める。杭底の深さ $z=l$ で考えてみると式(3)で示されるような鉛直方向の変位 W_s があるから，この鉛直方向の変位 W_s を $z=l$ の面の境界条件として与えるような杭底面の圧力を求めることになる。厳密にいえば水平方向の変位もあってそれも境界条件として与えるべきである訳であるが計算を簡単にするため $r=a$, $z=l$ の位置で示す鉛直方向の変位 W_s だけを取り出してその W_s と杭底面の分布圧力 g との関係を求めた。この一つの方法としてMindlinの式を積分して地中で円形等分布する鉛直荷重の端の沈下を次のようにして求めた．

$$W_{s\left(\substack{z=l\\ r=a}\right)}=\frac{g a}{E}X(1/m,\ l/a) \tag{8}$$

ここに $X(1/m,\ l/a)$ はポアソン比と杭の半径と長さとの比に関する才一種及び才二種完全楕円積分の函数である．この W_s は式(4)から求めた式(6)において $\frac{Q}{2\pi a}\times\frac{1}{E}x_2$ で示されているから結局式(9)から g が求まることになる。杭頭にかかる全荷重 R は

$$R=\pi a^2 g+Q=\pi a^2\cdot\frac{Q}{2\pi a^2}\cdot\frac{x_2}{X}+Q=Q\left(1+\frac{1}{2}\frac{x_2}{X}\right) \tag{9}$$

この R と Q との関係を式(6)に代入して

$$W_{p_0}=\frac{R}{2\pi a}\cdot\frac{1}{E}\left\{\frac{E}{E_p}x_1+x_2\right\}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{x_2}{X}} \tag{10}$$

以上の計算のうち k が未知の常数である。杭の側面摩擦の分布は式(2)によって示されるように $z\cdot\sin kz$ の形で表わされている。又多くの観測や実験によると側面摩擦は深さに比例するのではなく杭先支持力がある場合はある深さに至るまで増加し その後は杭先に向って減少している。それ故にいま $z=l$, $r=a$ の杭先の所で $\tau=0$ と仮定すると式(2)から $kl=n\pi\ (n=1.2.\cdots\cdots)$ となって k が求められる。このようにして式(10)に含まれる係数は全て計算できる。即ち杭径，杭長，土のポアソン比，杭と土とのヤング係数の関係を入れると全荷重 R と杭頭の沈下 W_{p_0} との関係が求まる．計算の結果の一例を示すと

		200	100	50	25	10
l/a		200	100	50	25	10
x_1		104.7	54.3	26.6	13.2	5.12
x_2	$m=2$	0.00330	0.00598	0.0908	0.1415	0.2311
	$m=4$	0.00412	0.0745	0.114	0.177	0.289
	$m=\infty$	0.0439	0.0794	0.121	0.189	0.308
X	$m=2$	0.478	0.478	0.478	0.495	0.531
	$m=4$	0.530	0.530	0.530	0.540	0.583
	$m=\infty$	0.478	0.478	0478	0.485	0.529

以上の計算には杭の自重は考えていないし 多くの仮定や省略を入れてあるから理論的には十分ではないが，杭の側面摩擦の影響を考えて，地盤内の応力の釣合いを充すようにしてその杭の沈下を求めようとしたものである。 どの程度まで実際に役立つかは実験実例と比較して次回に報告したいと思う。

参考文献　西田義親：第18回年次学術講演会（昭和38年）
山肩邦男：日本建築学会論文報告書（昭和36年，昭和37年）