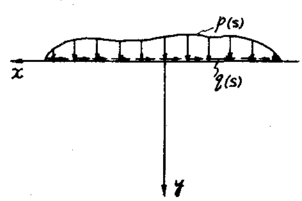
III－63　直交異方性弾性基盤の変形状態について

名古屋大学　正員　川本朓万

1．はしがき　直交異方性基盤における応力状態についてはさきに報告し，[*)] 岩盤の成層状態による基盤の異方性や基盤の弾性々質が深さとともに変化することの応力状態に及ぼす影響について検討した。基盤の地質工学的条件はかなり複雑であり，さらに地形条件の複雑さとともに基盤内の応力や変形状態および安全性の解決を困難にしている。基盤に対して種々の力学模型を適用することにより多くの研究が行われているが，ここでは直交異方性の弾性基盤を考える。たとえばアーチダムの基盤はダム本体と一体の構造物と考えてその安全性が検討されねばならない。このため最近基盤の力学的性状を明らかにするためにRock Mechanicsが大いに討議されるようになってきたが，基盤の変形状態について検討したものは少ない。[**)] 一般に基盤の応力状態が局所的な応力集中や滑り破壊等の基盤の安全性に対して充分に有利な場合であっても，そのときの基盤の変形状態によってその上にある構造物の安全性が極度に減少する可能性は少なくない。この点にかんがみ，さきの報告で求めた直交異方性弾性体の平面ひずみ問題における応力関数を用いて変位式を求め，いくつかの異方性の状態の基盤に対して数値計算を行って，主弾性係数比およびその方向が基盤の変位にいかなる影響を及ぼすかを検討した。

2．基礎方程式および変位式　図－1のように半無限板（平面ひずみ状態）を考え，応力関数をUとするとこの場合の適合条件式は既知のごとく次式で与えられる。



図－1

$$a_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \qquad (1)$$

上式の特性方程式の根を s_1, s_2, s_3, s_4 とすると，$s_1=\alpha_1+i\beta_1$, $s_2=\alpha_2+i\beta_2$, $s_3=\alpha_1-i\beta_1$, $s_4=\alpha_2-i\beta_2$ のようになり，(1)式を満足する応力関数Uはつぎのように $z_1=x+s_1y$, $z_2=x+s_2y$ に関する2つの解析関数 $W_1(z_1)$, $W_2(z_2)$ で与えられる。

$$4U={}''W_1(z_1)+{}''W_2(z_2)+{}''\overline{W_1}(\bar{z}_1)+{}''\overline{W_2}(\bar{z}_2) \qquad (2)$$

さらに各変位成分（u, v はそれぞれxおよびy方向変位）はつぎのように与えられる。

$$4(u+iv)=p_1{}'W_1(z_1)+p_2{}'W_2(z_2)+\bar{q}_1{}'\overline{W_1}(\bar{z}_1)+\bar{q}_2{}'\overline{W}(\bar{z}_2)+\text{const.} \qquad (3)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}p_k&=a_{12}-a_{16}s_k+a_{11}s_k^2+\frac{i}{s_k}(a_{22}-a_{26}s_k+a_{12}s_k^2)\\ \bar{q}_k&=a_{12}-a_{16}\bar{s}_k+a_{11}\bar{s}_k^2+\frac{i}{s_k}(a_{22}-a_{26}\bar{s}_k+a_{12}\bar{s}_k^2)\qquad (k=1,2)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

図－1に示すような直線境界上に分布垂直荷重$p(s)$およびせん断荷重$q(s)$が作用する場合に対する解析関数 $W_1(z_1)$, $W_2(z_2)$ はつぎのように求められる。

$$W_k(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{4}{s_k-s_l}\int_A\frac{s_l\,p(s)-q(s)}{s-z_k}\,ds \qquad (k=1,2;\ l=1,2;\ k\neq l) \qquad (5)$$

上式中の積分は全境界線上での積分を示す。いま全境界上に作用する荷重として図-2に示すものを考えると、それぞれの場合に対して $W_k(z_k)$ はつぎのように与えられる。

$$(a)\quad W_k(z_k)=\frac{2p_0}{\pi i}\cdot\frac{s_l}{s_k-s_l}\log\frac{1-z_k}{1+z_k}=\frac{4p_0}{\pi}\cdot\frac{s_l}{s_k-s_l}\tan^{-1}iz_k \qquad (6)$$

$$(b)\quad W_k(z_k)=\frac{-2q_0}{\pi i}\cdot\frac{1}{s_k-s_l}\log\frac{1-z_k}{1+z_k}=\frac{-4q_0}{\pi}\cdot\frac{1}{s_k-s_l}\tan^{-1}iz_k \qquad (7)$$

$$(c)\quad W_k(z_k)=\frac{2p_0}{\pi i}\cdot\frac{s_l}{s_k-s_l}\left(2+z_k\log\frac{1-z_k}{1+z_k}\right)=\frac{4p_0}{\pi}\cdot\frac{s_l}{s_k-s_l}\left(1+z_k\tan^{-1}iz_k\right) \qquad (8)$$

$$(k,l=1,2;\ k\neq l)$$

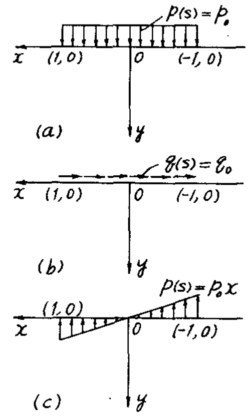


図 - 2

上の $W_k(z_k)$ の値を(3)式に代入し、実部と虚部とに分解すれば応変位成分を求めることができる。いまつぎのようにおく。

$$\left.\begin{aligned}
&L_k(x,y)=\log\{(x+1)^2+2\alpha_k(x+1)y+(\alpha_k^2+\beta_k^2)y^2\}\\
&L'_k(x,y)=\log\{(x-1)^2+2\alpha_k(x-1)y+(\alpha_k^2+\beta_k^2)y^2\}\\
&t_k(x,y)=\tan^{-1}\frac{\beta_k y}{x+\alpha_k y+1},\quad t'(x,y)=\tan^{-1}\frac{\beta_k y}{x+\alpha_k y-1},\qquad \alpha=\alpha_k-\alpha_l,\quad \beta=\beta_k-\beta_l\\
&\qquad\qquad (k,l=1,2;\ k\neq l)
\end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

$$(a)\quad \left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}=\frac{p_0}{4\pi(\alpha^2+\beta^2)}\sum_{\substack{k=1,2\\ l=1,2}}\sum_{k\neq l}\Big[\Big\{{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}(x+1)+{B_{k,l}\atop \bar D_{k,l}}y\Big\}L_k(x,y)-\Big\{{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}(x-1)+{B_{k,l}\atop \bar D_{k,l}}y\Big\}L'_k(x,y)+2\Big\{{C_{k,l}\atop \bar A_{k,l}}(x+1)+{D_{k,l}\atop \bar B_{k,l}}y\Big\}t_k(x,y)$$
$$-2\Big\{{C_{k,l}\atop \bar A_{k,l}}(x-1)+{D_{k,l}\atop \bar B_{k,l}}y\Big\}t'_k(x,y)-{A\atop B} \qquad (10)$$

ここに、

$$\left.\begin{matrix}A_{k,l}\\ \bar A_{k,l}\end{matrix}\right\}=-S_{k,l}{A_k\atop C_k}-R_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}B_{k,l}\\ \bar B_{k,l}\end{matrix}\right\}=Q_{k,l}{A_k\atop C_k}+P_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}C_{k,l}\\ -\bar C_{k,l}\end{matrix}\right\}=-R_{k,l}{A_k\atop C_k}+S_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}D_{k,l}\\ -\bar D_{k,l}\end{matrix}\right\}=P_{k,l}{A_k\atop C_k}-Q_{k,l}{B_k\atop D_k} \qquad (11)$$

さらに、

$$\left.\begin{aligned}
&P_{k,l}=\alpha_k(\alpha_l^2+\beta_l^2)-\alpha_l(\alpha_k^2+\beta_k^2), && Q_{k,l}=\beta_k(\alpha_l^2+\beta_l^2)-\beta_l(\alpha_k^2+\beta_k^2),\\
&R_{k,l}=(\alpha_k-\alpha_l)\alpha_l+(\beta_k-\beta_l)\beta_l, && S_{k,l}=\alpha_k\beta_l-\alpha_l\beta_k
\end{aligned}\right\}\qquad (12)$$

また、

$$\left.\begin{aligned}
&A_k=a_{12}-a_{16}\alpha_k+a_{11}\alpha_k^2, && B_k=-a_{16}\beta_k+2a_{11}\alpha_k\beta_k\\
&C_k=\frac{a_{22}}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)}\beta_k-a_{12}\beta_k, && D_k=\frac{a_{22}}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)}\alpha_k-a_{26}+a_{12}\alpha_k
\end{aligned}\right\}\qquad (13)$$

$$(b)\quad \left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}=\frac{q_0}{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}\sum_{\substack{k=1,2\\ l=1,2}}\sum_{k\neq l}\Big[\Big\{-{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}(x+1)+{B_{k,l}\atop \bar D_{k,l}}y\Big\}L_k(x,y)-\Big\{-{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}(x-1)+{B_{k,l}\atop \bar D_{k,l}}y\Big\}L'_k(x,y)+2\Big\{-{C_{k,l}\atop \bar A_{k,l}}(x+1)+{D_{k,l}\atop \bar B_{k,l}}y\Big\}t_k(x,y)$$
$$-2\Big\{-{C_{k,l}\atop \bar A_{k,l}}(x-1)+{D_{k,l}\atop \bar B_{k,l}}y\Big\}t'_k(x,y)-{A\atop B} \qquad (14)$$

ここに係数 $A_{k,l}\cdots\cdots\bar D_{k,l}$ は(11)式と同じ形をとり、さらに $A_k\cdots\cdots D_k$ は(13)式で与えられるものと同じで、また

$$P_{k,l}=(\alpha_k-\alpha_l)\alpha_k-(\beta_k-\beta_l)\beta_k,\quad Q_{k,l}=(\alpha_k-\alpha_l)\beta_k+(\beta_k-\beta_l)\alpha_k,\quad R_{k,l}=(\alpha_k-\alpha_l),\quad S_{k,l}=(\beta_k-\beta_l) \qquad (15)$$

$$(c)\quad \left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}=\frac{p_0}{4\pi(\alpha^2+\beta^2)}\sum_{\substack{k=1,2\\ l=1,2}}\sum_{k\neq l}\Big[\Big\{{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}(x^2-1)+{B_{k,l}\atop \bar D_{k,l}}y^2+2{E_{k,l}\atop \bar F_{k,l}}xy\Big\}\Big\{L_k(x,y)-L'_k(x,y)\Big\}+2\Big\{{C_{k,l}\atop \bar A_{k,l}}(x^2-1)+{D_{k,l}\atop \bar B_{k,l}}y^2+2{F_{k,l}\atop \bar E_{k,l}}xy\Big\}\Big\{t_k(x,y)-t'_k(x,y)\Big\}$$
$$-4\Big\{{A_{k,l}\atop \bar C_{k,l}}x+{E_{k,l}\atop \bar F_{k,l}}y\Big\}\Big]-{A\atop B} \qquad (16)$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}A_{k,l}\\ \bar A_{k,l}\end{matrix}\right\}=-S_{k,l}{A_k\atop C_k}-R_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}B_{k,l}\\ \bar B_{k,l}\end{matrix}\right\}=Q_{k,l}{A_k\atop C_k}-R_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}C_{k,l}\\ -\bar C_{k,l}\end{matrix}\right\}=-R_{k,l}{A_k\atop C_k}+S_{k,l}{B_k\atop D_k}\\
&\left.\begin{matrix}D_{k,l}\\ -\bar D_{k,l}\end{matrix}\right\}=-P_{k,l}{A_k\atop C_k}-Q_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}E_{k,l}\\ \bar E_{k,l}\end{matrix}\right\}=U_{k,l}{A_k\atop C_k}+T_{k,l}{B_k\atop D_k},\quad \left.\begin{matrix}F_{k,l}\\ -\bar F_{k,l}\end{matrix}\right\}=T_{k,l}{A_k\atop C_k}-U_{k,l}{B_k\atop D_k}
\end{aligned}\right\}\qquad (17)$$

さらに

$$\left.\begin{aligned}
&P_{k,l}=-\alpha_k\beta_k(\alpha_k\beta_l-\alpha_l\beta_k)-(\alpha_k^2-\beta_k^2)(\alpha_l^2+\beta_l^2)+(\alpha_k^3\alpha_l-\beta_k^3\beta_l), && R_{k,l}=(\alpha_k-\alpha_l)\alpha_l+(\beta_k-\beta_l)\beta_l, && S_{k,l}=\alpha_k\beta_l-\alpha_l\beta_k\\
&Q_{k,l}=-\alpha_k\beta_k(\alpha_k\alpha_l+\beta_k\beta_l)+2\alpha_k\beta_k(\alpha_l^2+\beta_l^2)-(\alpha_k^3\beta_l+\alpha_l\beta_k^3), && T_{k,l}=\alpha_k(\alpha_l^2+\beta_l^2)-\alpha_l(\alpha_k^2+\beta_k^2), && U_{k,l}=\beta_k(\alpha_l^2+\beta_l^2)-\beta_l(\alpha_k^2+\beta_k^2)
\end{aligned}\right\}\qquad (18)$$

また係数 $A_k\cdots\cdots D_k$ は(13)式で与えられる。A, B は積分常数で境界条件より決定される。弾性常数、数値計算結果および変位状態の考察については当日説明する。

*) 川本朓万：ダム基礎岩盤内の応力状態に関する2,3の考察，発電水力 No.68

**) J. Litwiniszyn : Die Mechanik diskontinuierlicher Medien und ihre Anwendung in der Felsmechanik, Felsmechanik und Ingenieurgeologie, vol.1/3-4, 1963, ss.186-205.