

II-73 二成層密度流における乱流拡散について

東北大学工学部 正員 工博 若崎敏夫

1. 緒言 二成層密度流について数年前より実験をおこなっていたが、今回は実験によってわかったことから理論上の条件を設定し解析をこころみた。⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾ 流況は水平底勾配の二次元定常流であって境界面に安定な内部波が生成した状態およびそれより乱れた状態を対象としている。えられた結果は従来の実験結果をかなりよく説明している。

2. 内部境界面の形状 淡水二層の密度、水深、流速をそれぞれ $\rho_1, \rho_2; h_1, h_2; u_1, u_2$ とし水平底勾配でかつ $u_2 = 0$ の定常流にあつての水面勾配の式を誘導すると次式になる。

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{kf/\alpha'}{(1-h_1^3/hc'^3)(1-h_1/h_0)} \quad (1)$$

ここに x は水平下流方向を正とし、 α' は Belanger の定数、 kf は内部剪断抵抗係数であり、かつ $hc' = \sqrt[3]{\alpha' g^2 / g'}$, $g' = g \Delta \rho / \rho_1$ ($\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$), また $h_0 = h_1 + h_2$ で一定とする。

$h_1 = h_0$ または $h_1 = hc'$ のとき $dh_1/dx = \infty$ で前者は塩水楔先端に、后者は河口断面に相当する。 $h_1 \geq hc'$ によって $dh_1/dx \leq 0$ であり、また $h_1 \rightarrow 0$ で $dh_1/dx = kf/\alpha' > 0$ で

Fig. 1 の形をとる。また式 (1) は容易に積分できて次式で示される。

$$\frac{kfL}{\alpha' h_0} = \Phi(h_1/h_0) - \Phi(h_0/h_0) \quad (2)$$

$$\Phi(h_1/h_0) = \left[\frac{1}{5} \left(\frac{h_1}{hc'} \right)^5 - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 + \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{h_1}{hc'} \right)^3 \right] \left(\frac{h_1}{h_0} \right) \quad (3)$$

ここに L は $h_1 = h_0$ の地点より下流方向にはかった距離である。

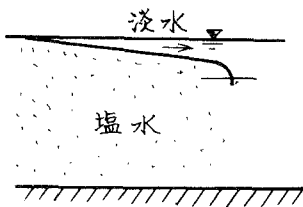


Fig. 1(a)

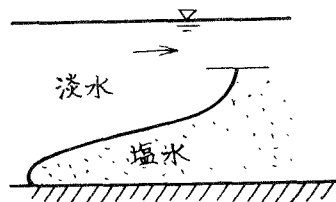


Fig. 1(b)

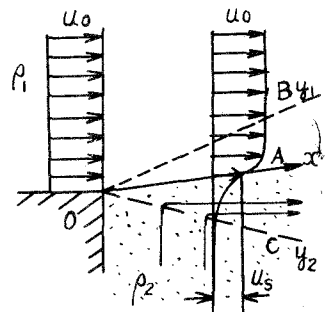


Fig. 2

3. 内部境界面に沿う乱流拡散 Fig. 2 に示すように点 O より下に塩水があり上に淡水があつて、これは一様流速 u_0 で侵入してくるとする。このとき境界 O A は式 (1) の示す勾配で傾

むくが、乱流の場合には境界面附近で自由な乱れが発達すると思われる。領域は淡水側では O B、塩水側では O C のように発達するとかんがえる。領域 A O C では塩水の乱流拡散がともなうため、密度は O A より O C にいたる間に漸変する。しかし O A より上にまき上げられる塩分はたちまち稀釈されるのでこの領域での ρ は一定とみてよい。また境界面 O

Aでの流速を U_s とし、また剪断応力を $\tau/\rho_1 = C^2 x^2/du/dy \mid (du/dy)$ とおく。ここに C は比例定数である。運動方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4)$$

$y/x = \eta$ とおき流速は $u = f(y/x) = f(\eta) = F'(\eta)$ とおくと淡水層での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta_1 \text{ で } u/u_0 = U = F'(\eta_1) = 1, \quad \partial u / \partial \eta = F''(\eta_1) = 0, \quad F(\eta) = \eta_1 \\ \eta = 0 \text{ で } \tau = \tau_i = k_f \rho_1 u_0^2 \text{ とおけば } F''(0) = k_f^{1/2}/C, \text{ また } U_s/u_0 = U_s = F'(0) \end{aligned} \right\} (5)$$

この解は、

$$U = \frac{u}{u_0} = -A e^{-\frac{\eta^*}{2}} + \frac{1}{2} (B + \sqrt{3}C) e^{\frac{\eta^*}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^* - \frac{1}{2} (\sqrt{3}B - C) e^{\frac{\eta^*}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^* \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } A &= \alpha e^{\eta_1^*} (\eta_1^* - 1) \\ B &= \alpha e^{-\eta_1^*} \{ (1 + 2\eta_1^*) E_c - \sqrt{3} E_s \} \\ C &= \alpha e^{\eta_1^*} \{ \sqrt{3} E_c + (1 + 2\eta_1^*) E_s \} \\ \alpha &= \frac{1}{3} \sqrt{2} C^2, \quad E_c = e^{\frac{\eta_1^*}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_1^*, \quad E_s = e^{\frac{\eta_1^*}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_1^* \\ \eta_1^* &= \eta_1 / \sqrt{2} C^2 \end{aligned} \right\} (7)$$

であり、内部剪断抵抗係数 k_f と η_1^* の間にはつぎの関係がえられる。

$$\sqrt[3]{4C} k_f^{1/2} = A - \frac{B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C \quad (8)$$

さらに境界面流速についてはつぎの式がえられる。

$$U_s = \frac{u_s}{u_0} = \frac{1}{6\alpha} (-2A + B + \sqrt{3}C) \quad (9)$$

式(8)(9)より $\sqrt[3]{4C} k_f^{1/2}$ および U_s と η_1^* の関係をもとめて図示すると、Fig. 3 のようになる。これによると k_f が大きいほど乱れの影響圏がひろがり、また境界面での流速は小さくなる。ことがわかる。

つぎに領域AOC内では密度が漸変する。そこで運動方程式(4)中の ρ は変数である。境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 \text{ で } F'(0) = U_s, \quad F''(0) = k_f^{1/2}/C \\ \eta = \eta_2 \text{ で } F'(\eta_2) = 0, \quad F''(\eta_2) = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

また拡散方程式は次式である。

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \frac{\partial S}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y \frac{\partial S}{\partial y}) \quad (11)$$

ここに S は濃度、 E_x, E_y は拡散係数である。ところで乱流の場合、分子拡散は無視できるほど小さく

乱流拡散が主体となることが知られている。そこで E_x, E_y は渦動粘性係数と同じく、 $C^2 x^2 (\partial u / \partial y)$ とおくことができるものとする。また $\rho = \rho_1 (1 + \alpha S)$ によって式(11)の変数 S と ρ に変換し、さらに ρ も η のみの関数とし、かつ $v \neq 0$ として式(4)と式(11)を

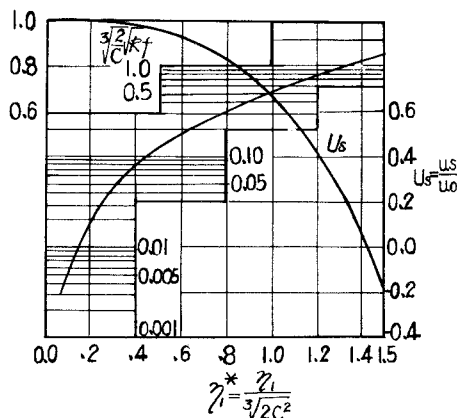


Fig. 3

連立にとけば、式(10)の境界条件のもとに解がえられる。

$$U = \frac{u}{u_0} = A_1 + 2A_2\eta^* - \frac{A_0}{2}\eta^{*2} - \frac{A_1}{3}\eta^{*3} - \frac{A_2}{4}\eta^{*4} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } A_1 &= U_s = u_s/u_0, A_2 = k_f^{1/2}/2\sqrt[3]{C}, \\ A_0 &= \frac{k_f^{1/2}}{\sqrt[3]{C}} \cdot \frac{24 + 4Y + Y^2}{4\sqrt[3]{2}(6+Y)\eta_2^*}, \quad Y = 2(\eta_2^*)^3 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、

$$\frac{U_s}{\sqrt[3]{2} k_f^{1/2}} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4+Y}{6+Y} \cdot \eta_2^* \quad (14)$$

Fig. 4は式(14)によって $U_s/\sqrt[3]{2} k_f^{1/2}$ と $(-\eta_2^*)$ との関係をしめしたものである。これによると0.368~1.792の範囲の $U_s/\sqrt[3]{2} k_f^{1/2}$ に対しては η_2^* の解が存在しない。またFig. 3より η_2^* に対する U_s および $\sqrt[3]{2} k_f^{1/2}$ がえられるので、その比を計算すればFig. 4より η_2^* がえられる。

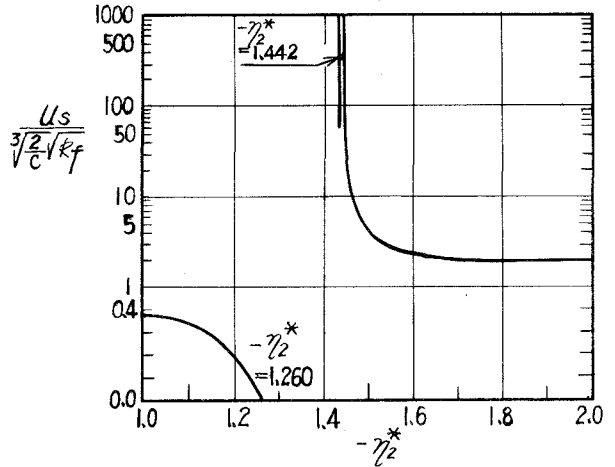


Fig. 4

Fig. 5はこうしてもとめた η_1^* と η_2^* との関係をしめす。図中の破線は上述の解が存在しない領域としめている。Kewleganの安定限界は $\eta = (F_1)^2 \cdot Re = 170$ であり、この場合の k_f は0.055である。Tollmienにしたがって $C = 0.0174$, $\sqrt[3]{C} = 4.86$ とすると $\sqrt[3]{2} k_f^{1/2} = 1.14$ 。よってFig. 3より $\eta_2^* = 1.40$ でこのとき $U_s \neq 0$ となり、これ以下の η_1^* に対しては U_s は負となり物理的に矛盾する。これはFig. 5では $\eta_2^* > 1.40$ での解の不存在域をしめす。

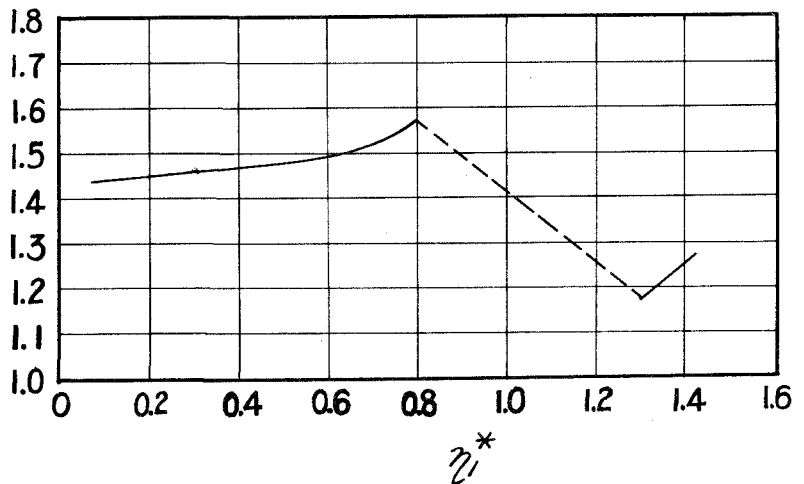


Fig. 5

つぎに上の限界値 $k_f = 0.055$ と、

浜田らの用いた中規模水路での値として $k_f = 0.01$ ⁵⁾ および 0.001、大坪・福島の現地河川調査の結果より $k_f = 0.0001$ ⁶⁾ を選んで(4)~(14)より速度分布と計算すると、Fig. 6 に示すようになる。

$\gamma = 170$ の場合は小規模水路の代表例ともいえるもので速度勾配が極めて大きいと同時に、塩水層内には逆むきの流れを生じる。この現象は実験的にも認められている⁷⁾。また現地河川のような場合には中間層はかなり下の方にまでひろがりかつ塩水層内に逆むき流れを生じない。

このことも実測と符合する⁶⁾とくに $k_f = 0.01$ のときには塩水層中の影響因子 γ^* の解がえられないことを前述したが、この付近で解けた内部波が生成しているものと思われる⁵⁾。

4. 密度分布 式(12)をえたもとの方程式と境界条件より密度分布は、

$$1 + \alpha \varepsilon = (1 + \varepsilon)^{\frac{\gamma^*}{\gamma_1}} \quad (15)$$

ここに $\alpha = \rho - \rho_1 / \rho_2 - \rho_1$ である。通常の塩水範囲 $\Delta \rho / \rho_1 = 0.1 \sim 0.3$ では直線的に分布するが、非常に重い液体の場合には淡水層に近い部分は淡水密度に近くなることかわかる。

参考文献

- 1) 若崎, 茂岡, 浜田「成層密度流における流速分布について」年次学会16回概要
- 2) 若崎, 浜田, 富岡「成層流における密度混合について」年次学会17回概要
- 3) 若崎, 前原, 同上(宇=観)年次学会18回概要
- 4) Tollmien, Z. a. M. M. 1926
- 5) 浜田, 堀口「塩水標の性質について」初回海洋工学
- 6) 大坪, 福島「Proc. I.A.H.R., vol. 3, 1959
- 7) 国崎「成層流の境界面における内部波および混合の実験的研究」沿岸海洋研究1+1.1, 1962

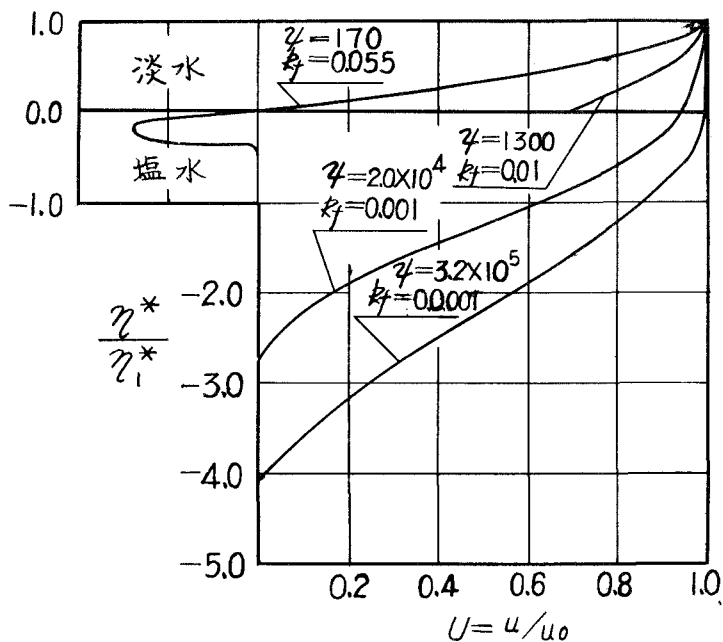


Fig. 6

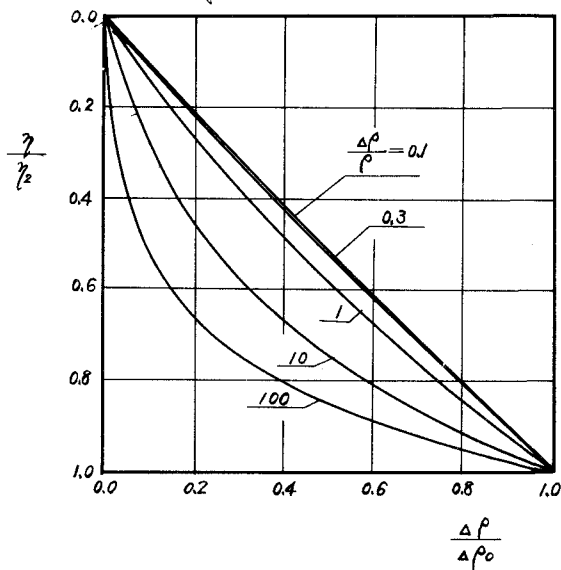


Fig. 7