Ⅱ―39 礫河川の河床材料調査について

名古屋大学 正員 足立昭平

河床の砂礫は流水が残した痕跡であるから，その粒度組成は流水の特性を受継いでいるにちがいない。本報文は，河床材料調査をただ平均粒径などの数値を求めるだけの作業にとどめないで，積極的に砂礫輸送に関する流水特性の解明に役立てることを目的として，河床砂礫の粒度組成を確率論的に意味づけようとしたものである。

1. 河床表面の砂礫粒度組成

河床表面に露出する砂礫の一測線上の粒度組成をあらわす特性値として，

$$\nu_0=\frac{\Sigma n_i}{L},\quad \nu_1=\frac{\Sigma n_i x_i}{L},\quad \nu_2=\frac{\Sigma n_i x_i^2}{L},\ \cdots\cdots,\quad \nu_k=\frac{\Sigma n_i x_i^k}{L},\ \cdots\ (i=1,2,\cdots) \qquad (1)$$

を定義しよう。ここに，L は測線の長さ，n_i は測線上の粒径 x_i の砂礫の個数である。(ν_1/ν_0)，(ν_2/ν_0)，$\cdots$，(ν_k/ν_0)，$\cdots$ は確率変数の分布を特性づける才1，2，…，k，…次のモーメントに帰着する。これらの ν と流水条件との結びつきを実証的に見出すことが本研究の目標であるが，概念的にはつぎのように考えられる。砂粒の並びは大小の粒径のものが重なり合うから，まず ν_0 は測線上の砂粒の平均径の逆数になぞらえる量である。ν_1 は流水に接する砂粒の重なりの程度をあらわし，単位測線長当りの一種の砂礫密度をあらわす。ν_2 は砂粒断面積の総和を測線長で割ったものであるから，砂粒による河床面の凹凸の平均高さに対応させることができる。3次以上の高次の ν も同様に砂粒による河床面の凹凸ないしは砂粒の重なりをあらわすパラメーターとして理解することができ，(1)式で定義される ν は少なくとも流水抵抗に直接関与する河床面粗度要素の特性値であるといってよい。さらに見方を変えて，砂礫が流送されている状態を想定すれば，河床に落下する砂粒がそのときに失う運動量の総和は，入れ替って下流へ運動を開始する砂礫に与えられる以外は，その断面における流れの損失ということになるであろう。個々の砂礫の落下時の運動量は，本質的には重力の加速度による外力と，流水との相対速度による抗力，および運動を開始したときに与えられた初速度に支配されるはずであるから，その総和を $\Sigma n_i x_i^k$ の形で仮定して，砂礫の運動形式による相違は指数 k の中に含まれると仮定しても，手始めの考察としては一応許されるであろう。以上から(1)式で定義される ν が測線上の砂礫粒度分布の特性値であると同時に流水の砂礫輸送に関する特性値であることを理解できよう。

(i) 才k次の ν_k が主要な特性値である場合の粒度組成：

ある1組の粒度組成 (n_i) について，個々の砂礫の並びの区別できる配列の仕方の数は

$$f=\frac{(\Sigma n_i)!}{n_1!\,n_2!\cdots\ n_k!\cdots},\qquad (i=1,2,\cdots) \qquad (2)$$

である。この配列の数 f が最大であるような (n_i) の組があるとすれば，それは

$$df=\Sigma\{(\partial f/\partial n_i)\,dn_i\}=0$$

るいは f の対数をとって, $d(\ln f) = \Sigma\{(\partial \ln f/\partial n_i)\,dn_i\} = 0$
満足するはずである。上式は Stirling の公式

$$\ln(n_i!) = (n_i + \tfrac{1}{2})\ln n_i - n_i + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi + O(\tfrac{1}{n_i})$$

用いて,つぎのようにあらわすことができる。

$$d(\ln f) = \Sigma(\{\ln(\Sigma n_i) - \ln n_i + O(\tfrac{1}{n_i^2})\}\,dn_i) = 0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

いまの場合オ k 次の ν_k が代表的特性値であるとするから,考えられるすべての組 (n_i) ν の定義 (1) 式によって,

$$\nu_k = \Sigma\, n_i\, x_i^k / L = \text{const.} \qquad \text{or} \qquad \Sigma\, x_i^k\, dn_i = 0 \qquad \cdots\cdots (4)$$

ある。(4) 式を満足する任意の dn_i に対して, f を最大にする組 (n_i) は, Lagrange の定乗数法によって, $d(\ln f) + \alpha\Sigma(x_i^k\, dn_i) = 0$ を満足するものでなければならない。(3) 式を代入して, n_i を十分大きいとして $O(\frac{1}{n_i^2})$ を省略すれば,

$$\ln n_i = \ln(\Sigma n_i) + \alpha x_i^k \qquad \text{or} \qquad n_i = (\Sigma n_i)\, e^{\alpha x_i^k}, \quad (i = 1, 2, \cdots) \quad \cdots (5)$$

得られる。ここに α は未定係数であるが, (5) 式の総和から $\Sigma\, e^{\alpha x_i^k} = 1$ を満足しなればならない。したがって,適当な長さの単位を選んで, $x = 1 \times \xi$ とおけば,

$$\Sigma\, e^{\alpha x_i^k} = \int_0^\infty e^{\alpha \xi^k} d\xi = (-\alpha)^{-1/k}\ \frac{1}{k}\Gamma(\tfrac{1}{k}), \quad (\alpha < 0) \qquad \cdots\cdots (6)$$

あるから,

$$-\alpha = \left\{\frac{1}{k}\,\Gamma(\tfrac{1}{k})\right\}^k \qquad \cdots\cdots (7)$$

なる。また砂粒個数の総和は (4) 式から $\Sigma n_i = \nu_k L / \Sigma\, x_i^k\, e^{\alpha x_i^k}$

$$\Sigma\, x_i^k\, e^{\alpha x_i^k} = \int_0^\infty \xi^k\, e^{\alpha \xi^k} d\xi = (-\alpha)^{-(\frac{1}{k}+1)}\,\frac{1}{k^2}\Gamma(\tfrac{1}{k}) \qquad \cdots\cdots (8)$$

着目すれば

$$\Sigma n_i = \nu_k L\, k \left\{\frac{1}{k}\Gamma(\tfrac{1}{k})\right\}^k \qquad \cdots\cdots (9)$$

なる。結局 f を最大にする粒径 x_i の砂礫個数 n_i は特性値 k および ν_k に対して,次式与えられる。

$$n_i = \nu_k L\, k \left\{\frac{1}{k}\Gamma(\tfrac{1}{k})\right\}^k e^{-\{\frac{1}{k}\Gamma(\frac{1}{k})\, x_i\}^k} \qquad \cdots\cdots (10)$$

いま (4) 式で規定されるすべての組における砂礫のすべての配列の状態が同じ確率であとすれば, (10) 式で与えられる n_i の組がもっとも高い確率であらわれることになる。いいかえれば,この粒度組成がもっとも確からしい状態であるといってよいであろう。
実際の砂礫粒度調査に,連続変数として粒径 x_i の個数 n_i を要求することは無理であから,粒度組成の表現式としては, (10) 式に求められた個々の粒径に対する個数ではなて,その積分形で与える方が適切である。砂礫個数を数える作業は,比較的大きい粒径砂礫に対してのみ可能であるから,その累積個数は大きい粒径から数えて,粒径 x_i よ大きい粒径の砂礫の総数を N_i であらわすことにすれば, (10) 式から,

$$N_i = (\Sigma n_i)\int_{\xi_i}^\infty e^{\alpha \xi^k} d\xi = \nu_k L\, k \left\{\frac{1}{k}\Gamma(\tfrac{1}{k})\right\}^{k-1} \int_{\xi_i}^\infty e^{-t^k} dt \qquad \cdots\cdots (11)$$

従来の調査方法では，大粒径の礫を含む場合にそれらの採集および篩分け作業が実際上不可能であるが，(10) 式はそのような場合に対して，礫の個数から粒度組成の特性を論じ得ることを示唆するものである。従来の砂粒々度はたんに篩分け作業の便利さから重量比による分布で求められているが，上記の考察から，重量比による粒度組成を求めると，つぎのようになる。個々の砂礫重量が粒径 x_i の3乗に比例すると考えれば，

$$w_i = \frac{n_i x_i^3}{\Sigma n_i x_i^3} = \frac{1}{k^3}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)^4 / \Gamma\left(\frac{4}{k}\right)\right\} x_i^3\ e^{-\left\{\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)x_i\right\}^k} \quad \cdots\cdots \ (12)$$

累積重量比を細粒子からとって W_i であらわせば，

$$W_i = \int_0^{\xi_i} t^3 e^{-t^k} dt \Big/ \int_0^{\infty} t^3\ e^{-t^k}\ dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (13)$$

となる。なお $\int t^p e^{-t^q} dt$ は，任意の指数 p, q に対して初等関数であらわせないが，電子計算機を用いて数表化することは比較的容易である。

(ii) 才k次と才m次の二つの ν_k および ν_m が主要な特性値であるときの粒度組成：

$$\nu_k = \Sigma n_i x_i^k / L = \text{const.},\quad \nu_m = \Sigma n_i x_i^m / L = \text{const.} \quad \cdots \ (14)$$

上式に束縛される粒度組成の中で，もっとも確からしい組成 (n_i) は，前項と全く同様にして，未定係数 α，β をとって，$d(\ln f) + \alpha\Sigma(x_i^k dn_i) + \beta\Sigma(x_i^m dn_i) = 0$ を満足しなければならない。(3) 式の関係を用いてこの方程式を n_i について解けば，

$$\ln n_i = \ln(\Sigma n_i) + \alpha x_i^k + \beta x_i^m = 0,\quad \text{or}\quad n_i = (\Sigma n_i) e^{\alpha x_i^k + \beta x_i^m} \quad \cdots \ (15)$$

が得られる。(15) 式の総和をとれば，$\Sigma e^{\alpha x_i^k + \beta x_i^m} = 1$ でなければならないから，$k > m$ とすれば，少なくとも $\alpha < 0$ でなければならない。α，β および Σn_i の値は，

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha\xi^k + \beta\xi^m} d\xi = 1,\quad \int_0^{\infty} \xi^k e^{\alpha\xi^k + \beta\xi^m} d\xi = \frac{\nu_k L}{\Sigma n_i},\quad \int_0^{\infty} \xi^m e^{\alpha\xi^k + \beta\xi^m} d\xi = \frac{\nu_m L}{\Sigma n_i} \quad \cdots \ (16)$$

の3方程式を満足するものである。(16) 式は一般に初等関数であらわされないから，数値計算によらねばならないが，これらの未定係数が見出されれば，累積個数 N_i および累積重量比 W_i はそれぞれ次式であたえられる。

$$N_i = (\Sigma n_i) \int_{\xi_i}^{\infty} e^{\alpha\xi^k + \beta\xi^m}\ d\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (17)$$

$$W_i = \int_{\xi_i}^{\infty} t^3\ e^{\alpha t^k + \beta t^m} dt \Big/ \int_0^{\infty} t^3\ e^{\alpha t^k + \beta t^m} dt \quad \cdots\cdots \ (18)$$

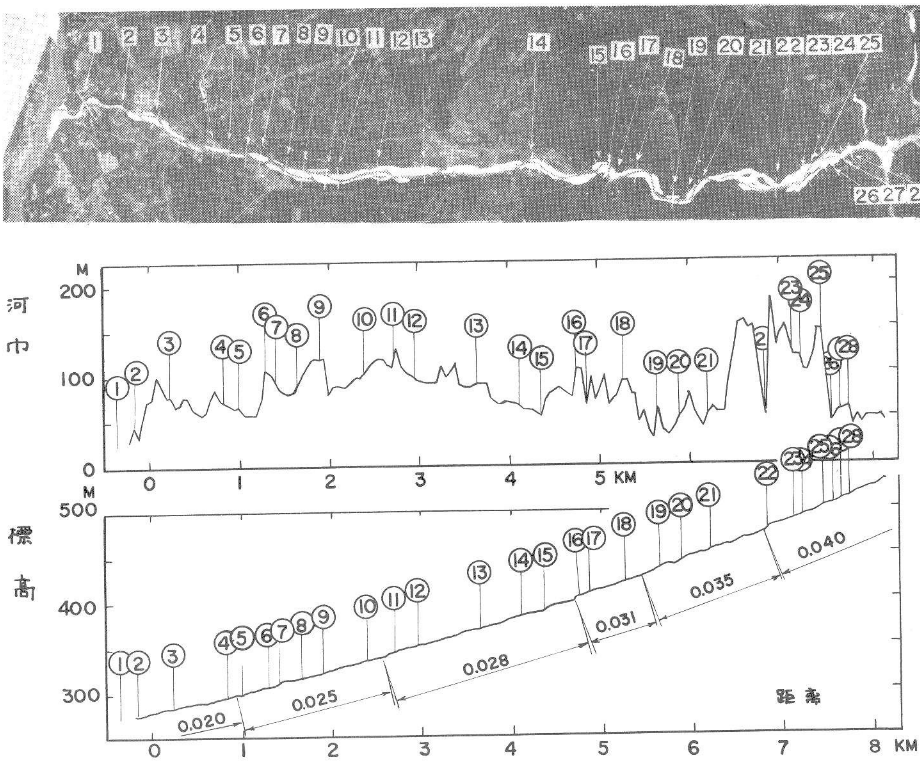
なお，$m = 0$ は主要な特性値が一つと見なされる場合に対応し，(9) 式を参照すれば，$\nu_0 / \nu_k = (1/k)^{k+1}\{\Gamma(1/k)\}^k$，$\beta = 0$，$(-\alpha) = (1/k)(\nu_0/\nu_k)$ であることがわかる。

2. 実河川における砂礫粒径調査資料の一例

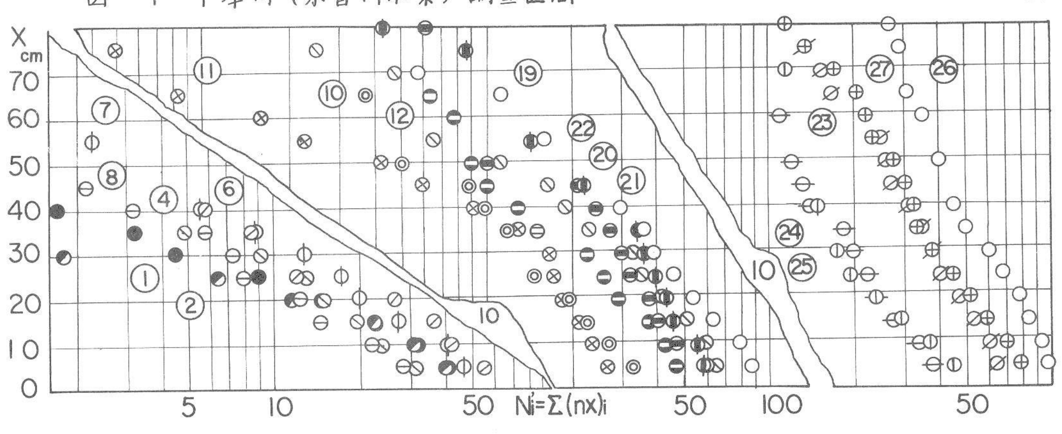
著者は以上の考察にもとづいて，木曽川水系中津川において砂礫粒度の調査を行なった。調査区間の河状は，図-1の航空写真，河巾および河床縦断図に見られるように，かなりの急流河川であって，土石の流出が著しい。調査方法は，まず 100 m 未縄を河川横断方向

に張り渡し，その米縄に触れる砂礫の直径を折尺をもって，5cm間隔の級別で測定し，各級別ごとの個数を記帳した。

測線長は断面によって長短があり，20m〜85m 平均36m である。



図－1　中津川（木曽川水系）調査区間



図－2　砂礫粒度累積個数　（番号は　図－1に示した測線番号をあらわす）

図－2は測線長1m当りの累積個数の一部を示したものであり，さきの考察における測線長Lに，単位巾を考慮すべきであると考えて，累積個数を $N_i' = \Sigma(nx)_i$ であらわした。これらの結果に対する詳細な検討はなお完了していないが，両図の対照から，上流部と下流部とは主要な特性値が異なるのではないかと思われる。終りに，本研究の遂行にあたって文部省科学研究費を受けたことを付記し，謝意を表する。