II — 38 開水路弯曲部における洗掘に関する流体力学的研究

神戸大学工学部　　正員　杉本修一

開水路弯曲部における水の流れについては，多くの人達によつて研究されてきた。例へば，古くは L. J. Tison (1937)，H. Wittmann und P. Böss (1938)，最近に至つて H. A. Einstein and J. A. Hader (1954)，L. J. Tison (1961) などがある。しかしこれらの報告は何れも弯曲部円周方向（弯曲部が円の一部分であるとすれば）の変化については考えられていない。

この報告は不完全であるが，この点を明らかにするための一つの試みである。このようにも考えられるという意味において……。

いま，開水路弯曲部を円弧の一部分であるとして，弯曲部の底面のみについて考えてみると，問題は2次元となる。

そこで，円の中心を原点として，半径方向の速度を U，それに直角な時計方向の速度を V，開水路外側半径を r_a，原点より考えている点までの半径を r，直線部から弯曲部の円弧に入る位置における半径の線より考えている点までの角度を ϕ，そして水は直線部から弯曲部へ一様な流速 v_0 で流入するものとする。

すると運動方程式は

$$U\frac{\partial U}{\partial r}+V\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}-\frac{V^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}. \tag{1}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}+\frac{UV}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}. \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU)+\frac{\partial V}{\partial \phi}=0. \tag{3}$$

いま，直線水路上を一様な流速 v_0 で流れている状態よりの変化量を u，v および p として

$$U=0+u(r,\phi). \tag{4}$$

$$V=v_0+v(r,\phi). \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{v_0^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}p(r,\phi). \tag{6}$$

であるとすれば，式(4)，(5)および(6)を式(1)，(2)および(3)に代入して微小量を省略すれば

$$\frac{v_0}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{2v_0 v}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{7}$$

$$v_0\frac{\partial v}{\partial \phi}+v_0 u=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi}. \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial v}{\partial \phi}=0. \tag{9}$$

これらの式(7)，(8)および(9)より v および p を消去すれば

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + 2u\right) + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{10}$$

を得る。　いま，　$u = f_1(\phi)\cdot f_2(r)$　であるとして，これを式(10)に代入すれば

$$\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial \phi^2} + 2f_1(\phi) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_2(r)}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial f_2(r)}{\partial r} = 0.$$

なる2つの方程式を得る。これらの方程式を外側半径 r_a に沿っては半径方向の速度 u は零であるという條件のもとに解けば，或る常数をKとして

$$u = K\left\{1-\cos(\sqrt{2}\,\phi)\right\}\left\{\frac{1}{(r/r_a)^2} - 1\right\}. \tag{11}$$

を得る。　つぎに式(9)より

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial r}(ur) = -\left(u + r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

を得るが，この式の u の値に式(11)を代入して ϕ について積分すれば

$$v = \frac{K}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{2}\,\phi - \sin(\sqrt{2}\,\phi)\right\}\left\{1 + \frac{1}{(r/r_a)^2}\right\}. \tag{12}$$

を得る。　つぎに式(7)より

$$\frac{v_0}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{2v_0 v}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

この式の u および v の値に式(11)および(12)を代入し積分すれば

$$\frac{p}{\rho} = \sqrt{2}\,K v_0\left[\sin(\sqrt{2}\,\phi)\frac{1}{(r/r_a)^2} + (\sqrt{2}\,\phi)\left\{\ln\left(\frac{r}{r_a}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{(r/r_a)^2}\right\}\right] \tag{13}$$

を得る。