

大阪市立大学 正員 工博 小松定夫

〃 〇正員 工修 中井博

1 まえがき

曲線桁橋の自由振動は，例へ対称断面であっても曲率の影響によって曲げとねじりの連成作用が起る。これは直線桁橋と著しく異なる性状である。

2 基礎微分方程式

図-1に示す断面のせん断中心Sにおいて，主軸に平行に右手系の座標 x, y, z をとる。そして， x 軸まわりのねじり角 β ， y, z 方向の変位を V, W とすれば，自由振動に対する基礎微分方程式(1)を得る。 ρ_y, ρ_z は z 軸の曲率 $1/R$ を y, z 軸に投影したものである。

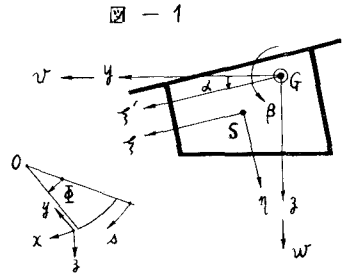


図-1

$$E_s I_y \left\{ \frac{\partial^4 V}{\partial \Delta^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2} + (\rho_y \rho_z)^2 \left(1 - \frac{I_y}{I_z} \right) V \right\} + m F_y \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ - E_s I_y \rho_y \rho_z \left(1 - \frac{I_y}{I_z} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Delta^2} + \rho_z^2 W \right) - m F_{yz} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ - E_s I_y \rho_y \left\{ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \Delta^2} + \left(\rho_y^2 + \rho_z^2 \frac{I_y}{I_z} \right) \beta \right\} - m S_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$E_s I_z \left\{ \frac{\partial^4 W}{\partial \Delta^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta^2} + (\rho_y \rho_z)^2 \left(1 - \frac{I_z}{I_y} \right) W \right\} + m F_z \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ - E_s I_z \rho_y \rho_z \left(1 - \frac{I_z}{I_y} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2} + \rho_y^2 V \right) - m F_{zy} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ - E_s I_z \rho_z \left\{ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \Delta^2} + \left(\rho_y^2 + \rho_z^2 \frac{I_z}{I_y} \right) \beta \right\} + m S_z \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0$$

$$E_s C_w \left\{ \frac{\partial^4 \beta}{\partial \Delta^4} - \frac{G_s J}{E_s C_w} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \Delta^2} + \left(\rho_y^2 \frac{I_y}{C_w} + \rho_z^2 \frac{I_z}{C_w} \right) \beta \right\} + m I_x \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \\ + E_s C_w \rho_y \left\{ \frac{\partial^4 V}{\partial \Delta^4} - \left(\frac{G_s J}{E_s C_w} + \frac{I_y}{C_w} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2} + \rho_z^2 \left(\frac{I_y}{C_w} - \frac{I_z}{C_w} \right) V \right\} - m S_y \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ + E_s C_w \rho_z \left\{ \frac{\partial^4 W}{\partial \Delta^4} - \left(\frac{G_s J}{E_s C_w} + \frac{I_z}{C_w} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta^2} + \rho_y^2 \left(\frac{I_z}{C_w} - \frac{I_y}{C_w} \right) W \right\} - m S_z \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

ここに，

I: 慣性モーメント

 C_w : 曲げねじり抵抗

J: ねじり抵抗

F: 断面積

S: せん断中心に対する断面一次モーメント

(F, Sは曲率 $1/R$ の関数)

また，

 $m = \gamma/g$, (γ : 密度, g : 重力加速度) E_s : 弾性係数 G_s : せん断弾性係数

3 自由振動の近似解

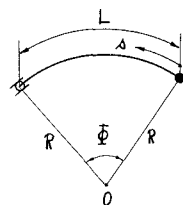
式(1)を時間 t について変数分離すれば， V, W, β の正規関数 V, W, B についての連立微分方程式をうる。この解は複雑であるので，正規関数の近似解として式(2)を用いた。

$$V(\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \psi_i(\Delta), \quad W(\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \omega_i(\Delta), \quad B(\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(\Delta) \quad (2)$$

そして、Galerkin 法を用いて、自由振動数 P_i を求める方程式として式(3)を得た。

$$\begin{vmatrix} (P_{i,\nu\nu}^2 - P_i^2)F_y & -(P_{i,\omega\nu}^2 - P_i^2)F_{y\beta} & -(P_{i,\ell\nu}^2 - P_i^2)S_y \\ -(P_{i,\nu\omega}^2 - P_i^2)F_{y\beta}' & (P_{i,\omega\omega}^2 - P_i^2)F_\beta & (P_{i,\ell\omega}^2 - P_i^2)S_\beta \\ -(P_{i,\nu\ell}^2 - P_i^2)S_y' & (P_{i,\omega\ell}^2 - P_i^2)S_\beta' & (P_{i,\ell\ell}^2 - P_i^2)I_x \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

図-2



特別な場合として、曲線桁橋の断面形状によって連成振動がどのような型になるかを明らかにした。また、S字型曲線桁橋についての自由振動を明らかにした。なお、式(3)を直線桁橋の場合にすれば、その結果は、S. Timoshenko¹⁾あるいは、J. M. Gere²⁾等の結果と完全に一致した。

4 単純桁橋の場合の解

図-2に示す単純曲線桁橋に対して式(3)中の $P_{i,\nu\nu}^2$, $P_{i,\omega\omega}^2$, $P_{i,\ell\ell}^2$ …… 等を求めれば、式(4)のようになった。直線桁橋では、式(4)で $\Phi = 0$ とおけばよい。

$$\begin{aligned} P_{i,\nu\nu}^2 &= \frac{E_s I_y}{m F_y L^4} \left\{ (i\pi)^4 - \Phi^2 (i\pi)^2 + \frac{\Phi^4}{4} \left(1 - \frac{I_y}{I_x} \right) \sin^2 2\alpha \right\} \\ P_{i,\omega\omega}^2 &= -\frac{E_s I_y \Phi^2}{2 m F_y L^4} \left(1 - \frac{I_y}{I_x} \right) \left\{ (i\pi)^2 - \Phi^2 \sin^2 \alpha \right\} \sin 2\alpha \\ P_{i,\ell\nu}^2 &= -\frac{E_s I_y \Phi}{m S_y L^3} \left\{ (i\pi)^2 - \Phi^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{I_y}{I_x} \cos^2 \alpha \right) \right\} \sin \alpha \\ P_{i,\ell\omega}^2 &= -\frac{E_s I_y \Phi^2}{2 m F_y L^4} \left(1 - \frac{I_y}{I_x} \right) \left\{ (i\pi)^2 - \Phi^2 \cos^2 \alpha \right\} \sin 2\alpha \\ P_{i,\omega\nu}^2 &= \frac{E_s I_y}{m F_y L^4} \left\{ (i\pi)^4 - \Phi^2 (i\pi)^2 + \frac{\Phi^4}{4} \left(1 - \frac{I_y}{I_x} \right) \sin^2 2\alpha \right\} \\ P_{i,\ell\ell}^2 &= \frac{E_s I_y \Phi}{m S_y L^3} \left\{ (i\pi)^2 - \Phi^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{I_y}{I_x} \sin^2 \alpha \right) \right\} \cos \alpha \\ P_{i,\nu\ell}^2 &= -\frac{E_s C_w \Phi}{m S_y L^5} \left\{ (i\pi)^4 + \left(\frac{G_s J_L^2}{E_s C_w} + \frac{I_y L^2}{C_w} \right) (i\pi)^2 + \Phi^2 \left(\frac{I_y L^2}{C_w} - \frac{I_y L^2}{C_w} \right) \cos^2 \alpha \right\} \\ P_{i,\omega\ell}^2 &= \frac{E_s C_w \Phi}{m S_y L^5} \left\{ (i\pi)^4 + \left(\frac{G_s J_L^2}{E_s C_w} + \frac{I_y L^2}{C_w} \right) (i\pi)^2 + \Phi^2 \left(\frac{I_y L^2}{C_w} - \frac{I_y L^2}{C_w} \right) \sin^2 \alpha \right\} \\ P_{i,\ell\ell}^2 &= \frac{E_s C_w}{m I_x L^4} \left\{ (i\pi)^4 + \frac{G_s J_L^2}{E_s C_w} (i\pi)^2 + \Phi^2 \left(\frac{I_y L^2}{C_w} \cos^2 \alpha + \frac{I_y L^2}{C_w} \sin^2 \alpha \right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

連続桁橋についての $P_{i,\nu\nu}$, $P_{i,\omega\omega}$, $P_{i,\ell\ell}$ …… 等の解を同様な形で得た。

5 数値計算結果

講演当日詳細に申し上げる予定である。

参考文献 1) S. Timoshenko; "工業振動学", 2) J. M. Gere and Y. K. Lin; "Coupled Vibration of Thin-Walled Beam of Open Cross Section" J. of Applied Mechanics 58, P. 373.