I－65　曲線橋の振動問題の解析

東京大学工学部　正員　平井敦
東京大学大学院　正員　○深沢泰晴

1．はじめに

曲線橋の振動は鉛直面内の曲げとねじれとの連成振動が支配的である。ここでは曲線桁橋全体を変形に際してその断面形が変化しないとして一本の曲線桁におきかえ，その単一曲線桁の鉛直面内の曲げとねじれの連成振動を扱う。断面の重心とせん断中心との間に鉛直方向の偏倚があれば，厳密には水平面内の曲げも連成するが曲線桁ではその影響は非常に小さく無視することができる。

外的強制力に対する桁のレスポンスを求めるにあたっては，振動方程式を積分変換を用いて直接に解く方法によった。積分変換を用いるこのような解法は桁の強制振動を解くのに極めて有力な方法であると思う。

2．振動方程式

せん断中心軸に作用する鉛直荷重 p_y^* とトルク荷重 τ_z^* を受ける曲線桁の弾性方程式は[1)]

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{R_s}{R_o}EI_x+\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}\right)u^{*IV}-GK^*u^{*\prime\prime}-\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}R_s\varphi^{IV}+\left(GK^*+\frac{R_s}{R_o}EI_x\right)R_s\varphi^{\prime\prime}=R_s^4p_y^*\\&-\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}u^{*IV}+\left(GK^*+\frac{R_s}{R_o}EI_x\right)u^{*\prime\prime}+\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}R_s\varphi^{IV}-GK^*R_s\varphi^{\prime\prime}+\frac{R_s}{R_o}EI_x\varphi=R_s^3\tau_z^*\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

ここに，(R,θ) は桁の曲率中心線上に原点をもつ極座標であり，R_o および R_s はそれぞれ断面の Centroidal axis およびせん断中心軸の曲率半径である。u^* はせん断中心の鉛直変位，φ は断面の見かけの回転角であり，また EI_x，GK^*，EC_ω^* はそれぞれ鉛直たわみ剛性，ねじれ剛性，曲げねじれ剛性である。＊印はせん断中心に関する量であることを示す。′ は θ に関する微分を意味する。勿論断面定数は曲線桁としての断面定数である。

次に，鉛直面内の曲げとねじれとの連成振動において，せん断中心軸の単位長さあたりに作用する慣性力 $\breve{p}_y^*$，$\breve{\tau}_z^*$ は

$$\breve{p}_y^*=-m^*\ddot{u}^*+m^*x_G\ddot{\varphi}\,,\qquad \breve{\tau}_z^*=-m^*i_p^{*2}\ddot{\varphi}+m^*x_G\ddot{u}^*\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに，m^* はせん断中心軸の単位長さあたりの梁の質量，x_G は重心とせん断中心との水平距り（重心が曲率中心側の場合を正），i_p^* はせん断中心に関する極回転半径である。

曲線橋に作用する外的強制力を鉛直力 $p_y^*(\theta,t)$ とトルク $\tau_z^*(\theta,t)$ とすると，連成振動の弾性方程式は D'Lambert の原理により(1)，(2)両式から，

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{R_s}{R_o}EI_x+\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}\right)u^{*IV}-GK^*u^{*\prime\prime}-\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}R_s\varphi^{IV}+\left(GK^*+\frac{R_s}{R_o}EI_x\right)R_s\varphi^{\prime\prime}+m^*R_s^4\ddot{u}^*-m^*x_GR_s^4\ddot{\varphi}=R_s^4p_y^*(\theta,t)\\&-\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}u^{*IV}+\left(GK^*+\frac{R_s}{R_o}EI_x\right)u^{*\prime\prime}+\frac{EC_\omega^*}{R_s^2}R_s\varphi^{IV}-GK^*R_s\varphi^{\prime\prime}+\frac{R_s}{R_o}I_xR_s\varphi-m^*x_GR_s^3\ddot{u}^*+m^*i_p^{*2}R_s^3\ddot{\varphi}=R_s^3\tau_z^*(\theta,t)\end{aligned}\right\}\cdot(3)$$

ここに ‥印は時間 t に関する微分を意味する。

3．固有振動数

単純支持の曲線橋の場合，鉛直面内の曲げとねじれの連成振動の固有円振動数 ω は(3)式において $p_y^*(\theta,t)=\tau_z^*(\theta,t)=0$ とおいて求めると次式で与えられる，

$$\left[\omega^2-(\omega_b^2+\gamma\omega_t^2)\right]\left[\gamma\omega^2-\left(\frac{\nu^4}{n^4}\omega_b^2+\gamma\omega_t^2\right)\right]-\left[\varepsilon\omega^2-\left(\frac{\nu^2}{n^2}\omega_b^2+\gamma\omega_t^2\right)\right]^2=0 \quad \cdots \quad (4)$$

ここに，ω_b，ω_tはそれぞれ曲線桁と同一断面をもち，曲線桁のせん断中心軸の円弧長$L_s=R_s\theta_0$をスパンとする直線桁のたわみ振動，ねじれ振動の固有円振動数である。すなわち，

$$\omega_b^2=\frac{EI_x}{m_0R_s^4}\left(\frac{n\pi}{\theta_0}\right)^4=\frac{EI_x}{m_0}\cdot\frac{n^4\pi^4}{L_s^4}, \quad \omega_t^2=\frac{\overline{GK}^*}{m^*i_p^{*2}R_s^2}\left(\frac{n\pi}{\theta_0}\right)^2=\frac{\overline{GK}^*}{m^*i_p^{*2}}\cdot\frac{n^2\pi^2}{L_s^2} \quad \cdots \quad (5)$$

(4)，(5)式において，$\overline{GK}^*=GK^*+\frac{n^2\pi^2}{L_s^2}EC_w^*$，$m_0=\frac{R_0}{R_s}m^*$，$\gamma=\frac{i_p^{*2}}{R_s^2}$，$\varepsilon=\frac{x_G}{R_s}$，$\nu=\frac{\theta_0}{\pi}$

4．強制振動の解

強制振動の弾性方程式(3)は，θについては有限フーリェ正弦変換，tについてはラプラス変換を施すことによって直接に解くことができる。すなわち，

$$\bar{u}^*=\int_0^{\theta_0}u^*\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta\,d\theta, \quad \bar{\varphi}=\int_0^{\theta_0}\varphi\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta\,d\theta, \quad \tilde{u}^*=\int_0^{\infty}e^{-st}\bar{u}^*dt, \quad \tilde{\varphi}=\int_0^{\infty}e^{-st}\bar{\varphi}\,dt$$

とすると，単純支持の境界条件（$\theta=0,\theta=\theta_0$；$u^*=\varphi=u^{*''}=\varphi''=0$）と初期条件（$t=0$；$u^*=\varphi=\dot{u}^*=\dot{\varphi}=0$）を考慮して(3)式から$\tilde{u}^*$，$\tilde{\varphi}$が次のように得られる，

$$\tilde{u}^*=\frac{1}{m^*}\cdot\frac{\tilde{p}_y^*\left(s^2+\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^4}{n^4}\omega_b^2+\omega_t^2\right)+\tilde{\tau}_z^*\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}s^2+\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^2}{n^2}\omega_b^2+\omega_t^2\right)}{(s^2+\omega_I^2)(s^2+\omega_{II}^2)}, \quad \tilde{\varphi}=\frac{1}{m^*\gamma R_s}\cdot\frac{\tilde{p}_y^*\left(\varepsilon s^2+\frac{n^2}{\nu^2}\omega_b^2+\gamma\omega_t^2\right)+\tilde{\tau}_z^*\left(s^2+\omega_b^2+\gamma\omega_t^2\right)}{(s^2+\omega_I^2)(s^2+\omega_{II}^2)} \quad \cdot (6)$$

ここに，ω_I，ω_{II}は固有円振動数で(4)式の2根である。また$\tilde{p}_y^*$，$\tilde{\tau}_z^*$は外力p_y^*，τ_z^*の有限正弦変換を

$$\bar{p}_y^*=\int_0^{\theta_0}p_y^*\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta\,d\theta, \quad \bar{\tau}_z^*=\int_0^{\theta_0}\tau_z^*\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta\,d\theta \quad \cdots \quad (7)$$

とすると，$\bar{p}_y^*$，$\bar{\tau}_z^*$のラプラス変換である。すなわ

$$\tilde{p}_y^*=\int_0^{\infty}e^{-st}\bar{p}_y^*dt, \quad \tilde{\tau}_z^*=\int_0^{\infty}e^{-st}\bar{\tau}_z^*dt \quad \cdots \quad (8)$$

逆変換は次式によって求めることができる，

$$\bar{u}^*=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\tilde{u}^*ds, \quad \bar{\varphi}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\tilde{\varphi}ds, \quad u^*=\frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}^*\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta, \quad \varphi=\frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta \quad \cdot \quad (9)_{a-d}$$

ここに，$i=\sqrt{-1}$，sは複素数であり$(9)_{a,b}$の複素積分はBromwich integralである。したがって(6)，$(9)_{a,b}$式より$\bar{u}^*$は次のようになる（$\bar{\varphi}$は省略），

$$\begin{aligned}\bar{u}^*(n,t)=&\frac{1}{m^*}\frac{\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^4}{n^4}\omega_b^2+\omega_t^2-\omega_I^2}{\omega_I(\omega_{II}^2-\omega_I^2)}\int_0^t\bar{p}_y^*(n,\xi)\sin\omega_I(t-\xi)d\xi+\frac{1}{m^*R_s}\cdot\frac{\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^2}{n^2}\omega_b^2+\omega_t^2-\frac{\varepsilon}{\gamma}\omega_I^2}{\omega_I(\omega_{II}^2-\omega_I^2)}\int_0^t\bar{\tau}_z^*(n,\xi)\sin\omega_I(t-\xi)d\xi\\&-\frac{1}{m^*}\cdot\frac{\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^4}{n^4}\omega_b^2+\omega_t^2-\omega_{II}^2}{\omega_{II}(\omega_{II}^2-\omega_I^2)}\int_0^t\bar{p}_y^*(n,\xi)\sin\omega_{II}(t-\xi)d\xi-\frac{1}{m^*R_s}\cdot\frac{\frac{1}{\gamma}\frac{\nu^2}{n^2}\omega_b^2+\omega_t^2-\frac{\varepsilon}{\gamma}\omega_{II}^2}{\omega_{II}(\omega_{II}^2-\omega_I^2)}\int_0^t\bar{\tau}_z^*(n,\xi)\sin\omega_{II}(t-\xi)d\xi\end{aligned} \quad (10)$$

これを$(9)_c$式に代入して$u^*(\theta,t)$が得られる。(10)式中の$\bar{p}_y^*$，$\bar{\tau}_z^*$は(7)式で計算されるわけであるが，例えば集中力$P^*(t)$，$T^*(t)$が移動しt時間後における位置が$\theta=\theta(t)$で表わされる場合には，

$$p_y^*(\theta,t)=\frac{1}{R_s}P^*(t)\,\delta[\theta-\theta(t)], \quad \tau_z^*(\theta,t)=\frac{1}{R_s}T^*(t)\,\delta[\theta-\theta(t)] \quad \cdots \quad (11)$$

$\delta(\theta)$はDiracのDelta functionである。したがって，

$$\bar{p}_y^*(n,\xi)=\frac{1}{R_s}P^*(\xi)\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta(\xi), \quad \bar{\tau}_z^*(n,\xi)=\frac{1}{R_s}T^*(\xi)\sin\frac{n\pi}{\theta_0}\theta(\xi) \quad \cdots \quad (12)$$

5．支点運動を受ける場合の解

支点A（$\theta=0$）に$u_A^*(t)$，$\varphi_A(t)$，支点B（$\theta=\theta_0$）に$u_B^*(t)$，$\varphi_B(t)$なる運動が加えられる場合は，(7)式の代りに，

$$\left.\begin{aligned}\bar{p}_y^*&=\frac{1}{R_s^4}\frac{n}{\nu}\left[u_A^*-u_B^*(-1)^n\right]\left[\frac{n^2}{\nu^2}\frac{R_s}{R_0}EI_x+\overline{GK}^*\right]-\frac{1}{R_s^3}\frac{n}{\nu}\left[\varphi_A-\varphi_B(-1)^n\right]\left[\frac{R_s}{R_0}EI_x+\overline{GK}^*\right]\\\bar{\tau}_z^*&=-\frac{1}{R_s^3}\frac{n}{\nu}\left[u_A^*-u_B^*(-1)^n\right]\left[\frac{R_s}{R_0}EI_x+\overline{GK}^*\right]+\frac{1}{R_s^2}\frac{n}{\nu}\left[\varphi_A-\varphi_B(-1)^n\right]\overline{GK}^*\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

とおけば前節の結果がそのままあてはまる。

参考文献　1）深沢泰晴：薄肉曲り梁の曲げとねじれに関する理論，土木学会論文集 投稿中．