I－62　吊橋のたわみ型自由振動に関する2,3の考察

京都大学工学部　正員 ○白石成人
〃　大学院　学生員　宇都宮英彦

1. まえがき

吊橋の自由振動について、これまで一般的考察を行ってきたが、その結果自由振動の振動型は、たわみ型とねじれ型の２種類に分類されることが明らかとなった。[1] 前者ではケーブルの橋軸水平方向および鉛直方向のたわみ，ならびに補剛桁の鉛直たわみが連成し，後者では，考えられる９個のモードが全て連成する。[2]　たわみ型振動においては連成する変位は以下に述べるようにケーブルの鉛直および橋軸水平方向のたわみ，ならびに補剛桁の鉛直たわみであるが，ケーブルおよび補剛桁の鉛直たわみを等しくとると，基礎方程式はBleichらによって誘導された古典的基礎式と一致し，各変位間の連成はなくなる。すなわちケーブルの水平変位は存在しなくなり，このことは斜め吊材等による吊橋の補剛効果を評価する理論的基礎がなくなることになる。この立場から，たわみ型自由振動の基礎方程式を改めて理論的に考察し，ケーブルの水平橋軸方向のたわみと鉛直たわみの連成問題を明らかにせんとするものである。

2. 吊橋のたわみ型自由振動の基礎方程式に関する考察

吊橋のたわみ型自由振動の基礎方程式は，[1]

$$(EI_g w_0'')'' + 4\bar{\lambda}(w_0 - w) + \frac{W_s}{g}\ddot{w}_0 - \frac{W_s}{gA}(I_g \ddot{w}_0')' = 0 \tag{1}$$

$$\left(E_c A_c \frac{h'w' - u'}{(1+h'^2)^2}\right)' - H_w\left\{\frac{h'(w_0' + h'u')}{1 + h'^2}\right\}' + 2\bar{\lambda}u + \frac{W_c}{g}(1+h'^2)^{\frac{1}{2}}\ddot{u} = 0 \tag{2}$$

$$-\left\{E_c A_c \frac{h'(h'w' - u')}{(1+h'^2)^2}\right\}' - H_w\left\{\frac{w' + h'u'}{1+h'^2}\right\}' - 2\bar{\lambda}(w_0 - w) + \frac{W_c}{g}(1+h'^2)^{\frac{1}{2}}\ddot{w} = 0 \tag{3}$$

$$u^2 + (h + w_0 - w)^2 = h^2 \tag{4}$$

となる。式(1)～(4)の記号は先の研究結果[1]と同一のものが用いられている。(図参照)　式(1)～(3)は変位に関する基礎微分方程式で，式(4)はハンガー長が変化しないという拘束条件を表わす。これらの式は非線型的であるが，非線型性は式(4)の拘束条件で与えられることになる。

いま

$$u = h\sin\varphi \tag{5}$$

$$w = w_0 + h(1 - \cos\varphi) = w_0 + \frac{h}{2}\sin^2\varphi \tag{6}$$

とおけば，式(4)は式(5),(6)によって満足される。式(5)における u（ケーブルの水平変位）は，鉛直たわみ w, w_0 に比べて小さいと考えられるので，

$$u \doteqdot h\varphi \tag{7}$$

とすれば，ケーブルの鉛直たわみと補剛桁の鉛直たわみの差 $w - w_0$ は $\frac{h}{2}\varphi^2$ に比例し，両者の間は非線型的に関係づけられていることになる。

さて，式(5),(6) の関係を用いて，式(1)～(3)に対応する基礎方程式を変分原理から誘導す

ると，φ と W_0 に関する２つの微分方程式となる。すなわち

$$
\begin{aligned}
&-\left(EI_y W_0''\right)''+\left\{\frac{2E_cA_c h'^2}{(1+h'^2)^2}W_0'\right\}'+\left\{\frac{2H_w}{1+h'^2}W_0'\right\}'-\left\{\frac{2E_cA_c h'}{(1+h'^2)^2}\left[h'\sin\varphi-h'^2(1-\cos\varphi)\right.\right.\\
&\left.\left.-h(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\varphi'\right]\right\}'+\left\{\frac{2H_w}{1+h'^2}\left[h'(1-\cos\varphi)+h'^2\sin\varphi+(h'\cos\varphi+\sin\varphi)h\varphi'\right]\right\}'\\
&=\left(\frac{W_s}{g}+\frac{2W_c}{g}\sqrt{1+h'^2}\right)\ddot{W}_0+\frac{2W_c}{g}h\sqrt{1+h'^2}\left(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}+\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\frac{2E_cA_c}{(1+h'^2)^2}h(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\left[-h'W_0'+h'\sin\varphi-h'^2(1-\cos\varphi)+h(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\varphi'\right]\right\}'-2H_w\left\{h(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\right\}\\
&-\left\{\frac{2H_w}{1+h'^2}h(h'\cos\varphi+\sin\varphi)\left[W_0'+h'(1-\cos\varphi)+h'^2\sin\varphi+h\varphi'(h'\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\right\}'\\
&+\frac{2E_cA_c}{(1+h'^2)^2}\left\{h'\cos\varphi-h'^2\sin\varphi-h\varphi'(\sin\varphi+h'\cos\varphi)\right\}\left\{-h'W_0'+h'\sin\varphi-h'^2(1-\cos\varphi)+h(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\varphi'\right\}\\
&-2H_w\left\{-h'\cos\varphi+h'^2\sin\varphi+h\varphi'(\sin\varphi+h'\cos\varphi)\right\}\\
&+\frac{2H_w}{1+h'^2}\left\{h'\sin\varphi+h'^2\cos\varphi+h\varphi'(\cos\varphi-h'\sin\varphi)\right\}\left\{W_0'+h'(1-\cos\varphi)+h'^2\sin\varphi+h\varphi'(h'\cos\varphi+\sin\varphi)\right\}\\
&-2W_c\sqrt{1+h'^2}\,h\sin\varphi-\frac{W_c}{g}\sqrt{1+h'^2}\left(2h\dot{W}_0\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\\
&+\frac{W_c}{g}\sqrt{1+h'^2}\left\{2h\ddot{W}_0\sin\varphi+2h\dot{W}_0\cos\varphi\,\dot{\varphi}+2h^2\ddot{\varphi}\right\}=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

のようである。　式(8)，(9) は明らかに非線型の連立微分方程式であり，これらの厳密解求めることはほとんど不可能である。しかしいま，式(8)，(9) において，φ および W_0 に関る２次以上の high order の項を無視し，さらに $h'^2 \ll 1$ とし $h\varphi=u$ のように変数を φ か再び u に還元すれば，次式を求めることができる。

$$
\left(\frac{W_s}{g}+\frac{2W_c}{g}\right)\ddot{W}_0+\left(EI_yW_0''\right)''-2H_wW_0''-2E_cA_c\left(h'^2W_0'\right)'+\left\{(2E_cA_c+2H_w)h'u'\right\}'=0 \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2W_c}{g}h\ddot{u}-\left[2E_cA_chu'+2H_whh'^2u'\right]+2H_w(h'u)'+(2E_cA_c-2H_w)h'u'-2W_cu\\
&+\left[(2E_cA_c-2H_w)hh'W_0'\right]'-2(E_cA_c-H_w)h'^2W_0'=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式(10)，(11) は式(8)，(9) を線型化したものであり，吊橋のたわみ型自由振動の低次近似の基礎式であり，のたわみ型振動型はケーブル型が対称の場合，対称型と非対称型に分けることができるが，鉛直たわみが対称的な場合には，ケーブル水平変位は非対称的となる。

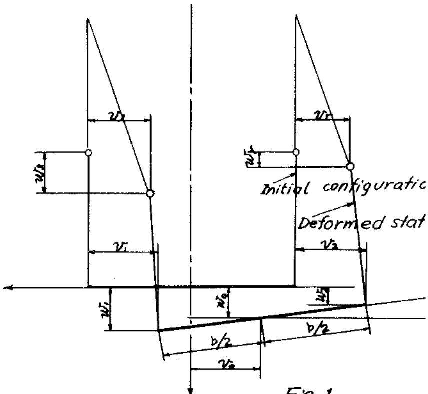

Fig. 1

3.　むすび

この研究は吊橋のたわみ型自由振動に関する理論的考察であり，線型化された基礎方程式を誘導し，吊橋の動的性状を明らかにせんとするものである。これらの基礎方程式は，斜め吊材，たとえば center diagonal stay 等による効果を知る理論的根拠を与えるものであり，その数値計算およびそれらに関する考察は当日発表する。

終りに，この研究について数々の御助言を賜った京大小西教授に感謝の意を表する。

参考文献

1)　N. Shiraishi　"Memoirs of the Faculty of Eng. Kyoto Univ. Vol. XXV, part 2, 1963

2)　N. Shiraishi　"On the coupled free vibrations of a suspension bridge"（京大工学部紀要に投稿中）