I－61　斜め吊材を持つ吊橋に関する2,3の考察

京都大学工学部　正員　小西一郎
京都大学工学部　正員　白石成人
建　設　省　正員　○榎波義幸

1. 概 略

本研究は Severn 橋の設計に採用された吊材型式である斜め吊材吊橋についての理論的解析を目的としたものである。斜め吊材吊橋は剛性の点で鉛直吊材吊橋に比べてすぐれているとされているが、これら斜め吊材吊橋の力学的特性については実験的には検討されているが，理論的考察については未だどのような論文も発表されていない。そこで，本研究では、エネルギー式から斜め吊材吊橋のたわみ，および自由振動についての基礎方程式を誘導し、この基礎方程式についての数値計算を 2,3 の例について行った。

2. 基礎方程式の誘導

斜め吊材吊橋の力学的解析を行うために図-1a に示すような吊橋を想定した。座標は図示されたように選定する。また，鉛直吊材に適用される仮定がこの場合にも成立するものとする。しかしここでは吊材の伸びとケーブルの水平変位を考慮する。

A. たわみについての基礎方程式

補剛桁の鉛直変位を V_s，ケーブルの鉛直変位を V_c，水平変位を U_c とすると吊橋のヒズミエネルギーは，

$$U=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\frac{d^2V_s}{dx^2}\right)^2dx+E_cA_c\int_0^l\left[\frac{U_c'-y'V_c'}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^2dx+2H_w\int_0^l\{U_c'-y'V_c'\}dx+H_w\int_0^l\frac{\{V_c'+y'U_c'\}^2}{1+y'^2}dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{E_hA_h}\int_0^l(P_l^2+P_r^2-2P_0^2)\sqrt{h^2_{(x)}+a^2}\,dx \qquad (1)$$

E_s は鋼材のヤング率，I は補剛桁の断面2次モーメント，E_c, A_c はケーブルのヤング率，断面積，H_w は死荷重によるケーブル張力の水平成分，E_h, A_h は吊材のヤング率，断面積，P_l P_r は図1-b に示すような左右の吊材の張力，P_0 は死荷重による吊材張力である。

また，補剛桁，ケーブルの死荷重，および活荷重の鉛直変位によるポテンシャルエネルギーの変化は，

$$W=\int_0^l g_sV_s\,dx+\int_0^l 2g_c\sqrt{1+y'^2}\,V_c\,dx+\int_0^l G(x)V_s\,dx \qquad (2)$$

g_s, g_c は補剛桁，ケーブルの単位長当りの死荷重，$G(x)$ は単位長当りの活荷重である。

またケーブルの伸びを考慮すると，任意の位置 x での V_s, V_c, U_c の間には次の関係式が成立する。

$$f_l=U_c^2+(V_s-V_c)^2+2h(x)(V_s-V_c)+2a\left\{U_c-(h(x)+V_s-V_c)\frac{dV_s}{dx}\right\}+a^2\left(\frac{dV_s}{dx}\right)^2-\frac{2(P_l-P_0)}{E_hA_h}\left\{h^2(x)+a^2\right\}=0 \qquad (3)$$
$$f_r=U_c^2+(V_s-V_c)^2+2h(x)(V_s-V_c)-2a\left\{U_c-(h(x)+V_s-V_c)\frac{dV_s}{dx}\right\}+a^2\left(\frac{dV_s}{dx}\right)^2-\frac{2(P_r-P_0)}{E_hA_h}\left\{h^2(x)+a^2\right\}=0 \qquad (4)$$

Lagrange の乗数 λ_l, λ_r を用いて上式の拘束条件を導入して次の変分をとれば系の基礎微分方程式が求められる。

$$\delta\left[U-W-\int_0^l\lambda_lf_l\,dx-\int_0^l\lambda_rf_r\,dx\right]=0 \qquad (5)$$

ここで未知数は変位について3個，吊材張力について2個，Lagrange の乗数 λ_l, λ_r の計7個となる．これに対して式(5)から5個と拘束条件式(3)(4)の計7個の方程式が求められる。

これらの式からP_ℓ, P_rを消去すると，未知数$V_s, V_c, U_c, \lambda_\ell, \lambda_r$について次の5個の方程式が求まる。これがたわみについての基礎方程式である。

$$EI\frac{d^4V_s}{dx^4}-\frac{d}{dx}\left[2a(\lambda_\ell-\lambda_r)\{h(x)+V_s-V_c\}-2a^2(\lambda_\ell+\lambda_r)\frac{dV_s}{dx}\right]-2\lambda_\ell\left[h(x)+V_s-V_c-a\frac{dV_s}{dx}\right]-2\lambda_r\left[h(x)+V_s-V_c+a\frac{dV_s}{dx}\right]=g_s+G(x) \quad (6)$$

$$2E_cA_c\frac{d}{dx}\left[\frac{y'\{U_c'-y'V_c'\}}{\{1+y'^2\}^2}\right]-2H_w\frac{d}{dx}\left[\frac{V_c'+y'U_c'}{1+y'^2}\right]+2\lambda_\ell\left[h(x)+V_s-V_c-a\frac{dV_s}{dx}\right]+2\lambda_r\left[h(x)+V_s-V_c+a\frac{dV_s}{dx}\right]=g_s \quad (7)$$

$$2E_cA_c\frac{d}{dx}\left[\frac{U_c'-y'V_c'}{\{1+y'^2\}^2}\right]+2H_w\frac{d}{dx}\left[\frac{y'\{V_c'+y'U_c'\}}{1+y'^2}\right]+\lambda_\ell[a+U_c]+\lambda_r[U_c-a]=0 \quad (8)$$

$$U_c^2+(V_s-V_c)^2+2h(x)(V_s-V_c)+2a\left[U_c-\{h(x)+V_s-V_c\}\frac{dV_s}{dx}\right]+a^2\left(\frac{dV_s}{dx}\right)^2+\frac{4\lambda_\ell\sqrt{h^2(x)+a^2}+2P_0}{E_hA_h}\{h^2(x)+a^2\}=0 \quad (9)$$

$$U_c^2+(V_s-V_c)^2+2h(x)(V_s-V_c)-2a\left[U_c-\{h(x)+V_s-V_c\}\frac{dV_s}{dx}\right]+a^2\left(\frac{dV_s}{dx}\right)^2+\frac{4\lambda_r\sqrt{h^2(x)+a^2}+2P_0}{E_h\cdot A_h}\{h^2(x)+a^2\}=0 \quad (10)$$

3. 自由振動の基礎方程式

補剛桁およびケーブルの運動エネルギーは，

$$T=\frac{1}{2}\int_0^\ell\frac{g_s}{gA}\left\{I\left(\frac{\partial^2V_s}{\partial x\partial t}\right)^2+A\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}\right)^2\right\}dx+\int_0^\ell\frac{g_c}{g}\sqrt{1+y'^2}\left\{\left(\frac{\partial V_c}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U_c}{\partial t}\right)^2\right\}dx \quad (11)$$

Aは補剛桁の純断面積である。自由振動を考える際には活荷重は問題とならないから，$G(x)=0$とおけば，この場合にも式(1)～(4)の関係が成立する。したがって次の変分をとれば自由振動の基礎方程式が求まる。

$$\delta\left[T-U+W+\int_0^\ell\lambda_\ell f_\ell dx+\int_0^\ell\lambda_r f_r dx\right]=0 \quad (12)$$

これより求まる5個の式と式(3),(4)からP_ℓ, P_rを消去すると次の基礎方程式が求まる。

$$\frac{g_s}{g}\frac{\partial^2V_s}{\partial t^2}-\frac{g_sI}{gA}\frac{\partial^4V_s}{\partial x^2\partial t^2}+EI\frac{\partial^4V_s}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left[2a(\lambda_\ell-\lambda_r)\{h(x)+V_s-V_c\}-2a^2(\lambda_\ell+\lambda_r)\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]-2\lambda_\ell\left[h(x)+V_s-V_c-a\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]-2\lambda_r\left[h(x)+V_s-V_c+a\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]=g_s \quad (13)$$

$$\frac{2g_c\sqrt{1+y'^2}}{g}\frac{\partial^2V_c}{\partial t^2}+2E_cA_c\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y'\{U_c'-y'V_c'\}}{\{1+y'^2\}^2}\right]-2H_w\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_c'+y'U_c'}{1+y'^2}\right]+2\lambda_\ell\left[h(x)+V_s-V_c-a\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]+2\lambda_r\left[h(x)+V_s-V_c+a\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]=g_s \quad (14)$$

$$\frac{2g_c\sqrt{1+y'^2}}{g}\frac{\partial^2U_c}{\partial t^2}-2E_cA_c\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_c'-y'V_c'}{\{1+y'^2\}^2}\right]-2H_w\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y'\{V_c'+y'U_c'\}}{1+y'^2}\right]-2\lambda_\ell[U_c+a]-2\lambda_r[U_c-a]=0 \quad (15)$$

この3個の微分方程式と式(9),(10)から$V_s, V_c, U_c, \lambda_\ell, \lambda_r$の解を求めることができる。しかし，この式は非線型であるからここでは微小振動を考えて線型化すると次式のようになる。

$$\frac{g_s}{g}\frac{\partial^2V_s}{\partial t^2}-\frac{g_sI}{gA}\frac{\partial^4V_s}{\partial x^2\partial t^2}+EI\frac{\partial^4V_s}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{a^2EA_hh(x)}{\{h^2(x)+a^2\}^{3/2}}\left\{U_c-h(x)\frac{\partial V_s}{\partial x}\right\}+\frac{a^2g_s}{h(x)}\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]+\left\{\frac{EA_h\cdot h(x)^2}{[h^2(x)+a^2]^{3/2}}+\frac{g_s}{h(x)}\right\}(V_s-V_c)=0 \quad (16)$$

$$\frac{2g_c}{g}\frac{\partial^2V_c}{\partial t^2}+2E_cA_c\frac{\partial}{\partial x}\left[y'\frac{\partial U_c}{\partial x}-y'^2\frac{\partial V_c}{\partial x}\right]-2H_w\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V_c}{\partial x}-y'\frac{\partial U_c}{\partial x}\right]-\left\{\frac{EA_h\cdot h(x)^2}{[h^2(x)+a^2]^{3/2}}+\frac{g_s}{h(x)}\right\}(V_s-V_c)=0 \quad (17)$$

$$\frac{2g_c}{g}\frac{\partial^2U_c}{\partial t^2}-2E_cA_c\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U_c}{\partial x}-y'\frac{\partial V_c}{\partial x}\right]-2H_w\frac{\partial}{\partial x}\left[y'\frac{\partial V_c}{\partial x}-y'^2\frac{\partial U_c}{\partial x}\right]+\frac{a^2EA_h}{[h^2(x)+a^2]^{3/2}}\left\{U_c-h(x)\frac{\partial V_s}{\partial x}\right\}+\frac{g_s}{h(x)}U_c=0 \quad (18)$$

3. 数値計算

数値計算は$a=0$と$a=12m$の場合について式(6)～(10),式(10)～(18)を差分法で近似計算し，鉛直吊材吊橋と斜め吊材吊橋についての比較を試みた。これに関する詳細は当日発表する。

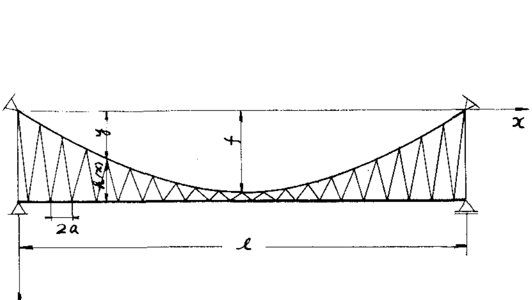

Fig-1·a

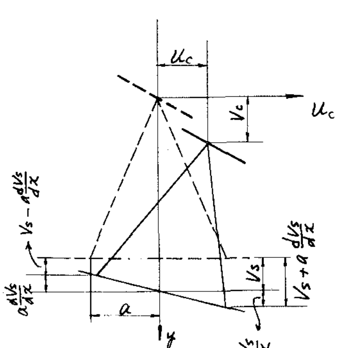

Fig-1·b