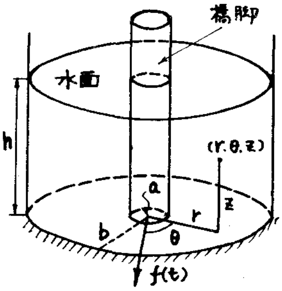
I－39　水中橋脚に作用する地震時動水圧の非定常解

京都大学工学部　正員　後藤尚男
京都大学大学院　学生員　○土岐憲三
京都大学大学院　学生員　横山康夫
京都大学大学院　学生員　尾島　勝

1. はしがき　地震動による動水圧の応答を知ることを目的として，任意の加速度運動をする円柱状水中橋脚に作用する動水圧についての理論解析を行なった。さらに，考える領域を有限な三次元空間にとって動水圧に及ぼす境界の影響について考察を進めた。

2. 基礎式　半径aの円柱状橋脚が水深h，半径bの円形貯水池内に直立している場合を考える。また，橋脚は1方向に平進運動をしており，外側の境界は静止しているものとする。右図のように円柱座標$r\cdot\theta\cdot z$を定めると，点(r,θ,z)の時間tにおける動水圧$\sigma(r,\theta,z:t)$に関する微分方程式はつぎの波動方程式で与えられる。



$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=0 \quad (c:\text{水中での音速}) \quad (1)$$

いま，考える領域を$h\geqq z\geqq 0$, $2\pi\geqq\theta\geqq 0$, $b\geqq r\geqq a$とし，橋脚の運動加速度を$f(t)$とすれば境界条件式はつぎのように表わされる（ただし，ρ：水の密度）。

$$\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)_{z=0}=\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)_{z=h}=0,\ \left(-\frac{\partial\sigma}{r\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\left(-\frac{\partial\sigma}{r\partial\theta}\right)_{\theta=\pi}=0,\ \left(-\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)_{r=b}=0,\ \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)_{r=a}=f(t)\cos\theta \quad (2)$$

また，初期条件として$(\sigma)_{t=0}=(\partial\sigma/\partial t)_{t=0}=0$を考える。　(3)

3. 理論解　まず，$\sigma(r,\theta,z:t)=\varphi(r,\theta,z)\cos\omega t$とおいて式(1)に代入するとHelmholtzの式になるが，変数分離を行なって得られるr,θ,zに関する常微分方程式はいずれも，*Strum-Liouville*型となるから固有関数による$\varphi(r,\theta,z)$の展開が可能である。z,θに関する境界条件を満足する固有値，固有関数は次式で与えられる。

$$Z(z)=\cos\alpha_m z\quad\left[\alpha_m h=\frac{2m-1}{2}\pi,\ m=1,2,\cdots\right],\qquad \Theta(\theta)=\cos n\theta\quad[n=1,2,\cdots]$$

またr方向に関しては，まず$f(t)=0$すなわち$(-\partial\sigma/\partial r)_{r=b}=(-\partial\sigma/\partial r)_{r=a}=0$を満足する固有関数を求める。$r=a$, $r=b$の一方のみの境界条件を満足する固有関数をそれぞれ$R_a(\lambda r)$, $R_b(\lambda r)$とすると次式で表わせる。

$$R_a(\lambda r)=J_n(\lambda r)Y_n'(\lambda a)-Y_n(\lambda r)J_n'(\lambda a),\qquad R_b(\lambda r)=J_n(\lambda r)Y_n'(\lambda b)-Y_n(\lambda r)J_n'(\lambda b)$$

ここに，λはn次の第1種，第2種のBessel関数のパラメーターである。$r=a$, $r=b$の両方の境界条件を同時に満足するためには$R_a(\lambda r)$, $R_b(\lambda r)$が線型的に従属であればよいから，この条件はWronskyの行列式$W[R_a(\lambda r),R_b(\lambda r)]$が0になることにより与えられる。すなわち，$R_a(\lambda r)R_b'(\lambda r)-R_b(\lambda r)R_a'(\lambda r)=0$である。　この式に$R_a(\lambda r)$, $R_b(\lambda r)$を代入して演算を遂行

すれば固有値を与える方程式として $J_n'(\lambda a)Y_n'(\lambda b)-Y_n'(\lambda a)J_n'(\lambda b)=0$ をうる。
上式を満足する固有値を λ_l と書くと固有関数 $R_a(\lambda r)$ は次式で表わされる。

$$R_a(\lambda r)=J_n(\lambda_l r)Y_n'(\lambda_l a)-Y_n(\lambda_l r)J_n'(\lambda_l a) \qquad [\,l=1,2,\cdots]$$

これらの結果から次式が $f(t)=0$ の場合の解を与えることは明らかである。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\chi(m.n.l)\cos\alpha_m z\cos n\theta\{J_n(\lambda_l r)Y_n'(\lambda_l a)-Y_n(\lambda_l r)J_n'(\lambda_l a)\}\cos\omega t \tag{4}$$

つぎに $f(t)=1$ の場合を考えると $r=a$ での境界条件は $1/\rho(-\partial\sigma/\partial r)_{r=a}=1\cos\theta$ となるが，この条件と基礎方程式(1)とを満足する特解 $\rho a^2\cos\theta/r$ に式(4)を加えたつぎの式

$$\bar{\sigma}(r,\theta,z:t)=\frac{\rho a^2}{r}\cos\theta+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\chi(m.n.l)\cos\alpha_m z\cos n\theta\{J_n(\lambda_l r)Y_n'(\lambda_l a)-Y_n(\lambda_l r)J_n'(\lambda_l a)\}\cos\omega t \tag{5}$$

は式(2)を満足する式(1)の解である。式(5)は初期条件 $(\partial\sigma/\partial t)_{t=0}=0$ を自動的に満足しているから，$(\sigma)_{t=0}=0$ が成り立つように未定係数 $\chi(m.n.l)$ を定めればよい。すなわち，

$$\frac{\rho a^2}{r}\cos\theta=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\chi(m.n.l)\cos\alpha_m z\cos n\theta\{J_n(\lambda_l r)Y_n'(\lambda_l a)-Y_n(\lambda_l r)J_n'(\lambda_l a)\}$$

ところで，$\cos n\theta$ の直交性により $n=1$ であることは容易に知れ，また $\sqrt{2/h}\cdot\cos\alpha_m z$ は正規直交関数であるから $\chi(m.l)=\chi_m\cdot\chi_l$ と書くとき $\chi_m=2\cdot(-1)^{m+1}/\alpha_m h$ とすればよい。したがって問題は a^2/r を $\{J_1(\lambda_l r)Y_1'(\lambda_l a)-Y_1(\lambda_l r)J_1'(\lambda_l a)\}$ によって展開することに帰着される。

いま $w(\lambda)=rW[R_a(\lambda r),R_b(\lambda r)]$，$w'(\lambda_l)=(dw(\lambda)/d\lambda)_{\lambda=\lambda_l}$，$k_l=R_b(\lambda_l r)/R_a(\lambda_l r)$ と書くと a^2/r は $b\geq r\geq a$ において連続であるから次式のように展開できる．

$$\frac{a^2}{r}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a^2k_l}{w'(\lambda_l)}R_a(\lambda_l r)\int_a^b R_a(\lambda_l\xi)d\xi$$

$w(\lambda)$，$w'(\lambda_l)$，k_l は従属変数を含むが λ_l が固有値であることによりいずれも定数となり χ_l が求められる。こうして得られた χ_m，χ_l を式(5)に持込めば次式をうる．

$$\bar{\sigma}(r,\theta,z:t)=\frac{\rho a^2}{r}\cos\theta+2\pi\rho a^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{\alpha_m h}\frac{\lambda_l\left\{\left(\frac{1}{\lambda_l a}\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda_l b}\right)^2\frac{J_1'(\lambda_l a)}{J_1'(\lambda_l b)}\right\}}{\left[1-\left(\frac{1}{\lambda_l b}\right)^2\right]\left\{\frac{J_1'(\lambda_l a)}{J_1'(\lambda_l b)}\right\}^2-\left\{1-\left(\frac{1}{\lambda_l a}\right)^2\right\}}[J_1(\lambda_l r)Y_1'(\lambda_l a)-Y_1(\lambda_l r)J_1'(\lambda_l a)]\cos\theta\cos\alpha_m z\cos\omega t$$

上式は $f(t)=1$ なる場合の解であるから境界条件式(2)，初期条件式(3)を満足する基礎方程式(1)の解 $\sigma(r,\theta,z;t)$ は Duhamel の定理により

$$\sigma(r,\theta,z:t)=\int_0^t f(\tau)\frac{\partial\bar{\sigma}(r,\theta,z:t-\tau)}{\partial t}d\tau$$

となる。したがって橋脚表面 $(r=a)$ での動水圧 $\sigma_{r=a}$ は結局次式で与えられる。

$$\sigma_{r=a}=4ac\rho\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\lambda_l^2+\alpha_m^2}}{\alpha_m h}\frac{\left(\frac{1}{\lambda_l a}\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda_l b}\right)^2\frac{J_1'(\lambda_l a)}{J_1'(\lambda_l b)}}{\left\{1-\left(\frac{1}{\lambda_l b}\right)^2\right\}\left\{\frac{J_1'(\lambda_l a)}{J_1'(\lambda_l b)}\right\}^2-\left\{1-\left(\frac{1}{\lambda_l a}\right)^2\right\}}\cos\theta\cdot\cos\alpha_m z\int_0^t f(\tau)\sin c\sqrt{\lambda_l^2+\alpha_m^2}(t-\tau)d\tau$$

上式により，橋脚が $f(t)$ なる加速度で運動するとき，橋脚表面上の任意点の時間 t における動水圧が求められ，さらに境界 b を変化させることによって境界の影響を知ることができる。数値計算結果は講演時に譲る。