I—35 Power Spectral Analysis について

名古屋大学　正員　中川建治

構造物のランダム振動に関して，「電子計算機によるシミュレーション」の立場から，Power Spectral Analysis のきわめて基本的な問題をとりあげて，2・3の検討を行なった。

周期性をもたないランダム関数 $f(t)$ を，形式的に Fourier 積分で変換した式によって表わされる $P_f(\omega)$，

$$P_f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\sqrt{2\pi}\,\frac{|F_T(\omega)|^2}{2T} \qquad (1)$$

$$F_T(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad (2)$$

を，$f(t)$ の Power Spectral Density Function，あるいは，Power Spectrum という。$P_f(\omega)$ は，$f(t)$ の自己共変量 $\varphi_f(\tau)$ とは，Fourier 変換の関係にあり，$P_f(\omega)$ は，$f(t)$ の自乗平均に対する周期成分という意味から，ランダム過程の確率統計的な取り扱いにおいては，不可欠の統計量である。

$$\varphi_f(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,f^*(t+\tau)\,dt \qquad (3)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}P_f(\omega)\,d\omega \qquad (4)$$

さて，周波数応答関数を $H(\omega)$ とする1自由度の線型系に $f(t)$ を入力として与えたときの，応答 $y(t)$ の Power Spectrum $P_y(\omega)$ は，

$$P_y(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot P_f(\omega) \qquad (5)$$

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \qquad (6)$$

となる。したがって，$f(t)$ が，0を平均値として，$\sigma_f^2=\varphi_f(0)$ を分散とする正規分布に従うものと仮定すれば，応答 $y(t)$ は，0を平均値として，

$$\sigma_y^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2P_f(\omega)\,d\omega \qquad (7)$$

を分散とする正規分布に従うことになる。$f(t)$ の自己共変量と同じようにして，$f'(t)$ の自己共変量を定義すれば，部分積分の公式により，$\varphi(\tau)$ とは，次のような関係になる。

$$\varphi_{f'}(\tau)=-\varphi_f''(\tau) \qquad (8)$$

$\varphi_f(\tau)$，および，$\varphi_f''(\tau)$ を用いれば，時間 $(t,\ t+dt)$ において，$f(t)$ が $(\eta,\ \eta+d\eta)$，$f'(t)$ が $(\xi,\ \xi+d\xi)$ の間に存在する確率密度関数 $p(\eta,\xi;\tau)$ は，次の式で与えられる。

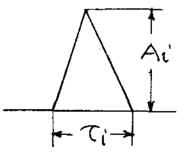
$$p(\eta,\xi;\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-\varphi_f(0)\,\varphi''(0)}}\exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\varphi(0)}+\frac{\xi^2}{2\varphi''(0)}\right\} \qquad (9)$$

$$N=\frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

式(10)のNは，$f(t)$ が正の勾配で0を通過する単位時間当りの回数である。以上の詳しいことは，しかるべき確率論の書物を参照されたい。

本文では、これらの、数学的には整然とした理論を、実際に、有限なデーターにもとづいて安全性の推定を行う工学に応用する場合の推定値の信頼性の検討を目標とした。すなわち、種々な初期乱数に対して、Neumannの自乗挿中法により、それぞれ所定の乱数を求めて、これを入力 $f(t)$ として、その応答 $y(t)$ の統計を行なった。

1) ランダム関数。自乗挿中法による乱数を [0, 1] の矩形分布の乱数とみなし、これより所定の分布に従う乱数を求める。$f(t)$ の波形は、[図－1] に示すように、3角波の連続したものとする。才 i 番目の波形では、振幅 $A_i = m_i \Delta a$，半周期 $\tau_i = n_i \Delta\tau$ として、m_i は正負の乱数、n_i は正の乱数によって定める。ここに示した計算例では、$i = 100$ としている。



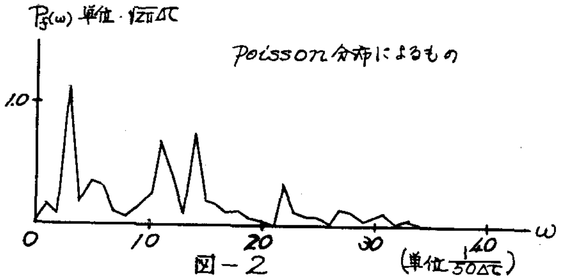
$A_i = m_i \Delta a$
$\tau_i = n_i \Delta\tau$
図－1

2) Power Spectrum の計算。$P_f(\omega)$ を、$\Delta\omega \cdot \Delta\tau = \frac{1}{100}$ とし、$|m_i|$，n_i の分布はそれぞれ、平均値10のPoisson分布、あるいは、[0, 20] の矩形分布に従うものとして計算した例を [図－2], [図－3] に示す。

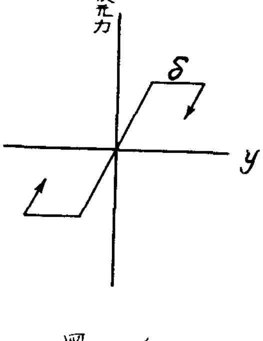
この1例でも分るように、$\omega = \frac{1}{2\Delta\tau}$ 以上の高周波成分は、事実上、無視してよい。

このようなPower Spectrum をもつランダム関数 $f(t)$ を、式(6) の特性をもつ線型系に与えて、その応答 $y(t)$ の Power Spectrum を、実計算による値と、式(5) で予想される値とで比較検討した。次に、有限データーによる解析結果が、式(9) の予測結果にどれほど近づくかを求め、[図－4] に示すような弾塑性の復元特性をもつ1自由度の系に $f(t)$ が作用した場合の、弾性域から塑性域へ移行する確率を求める。すなわち、正(負)の速度で $y(t)$ が $y_c(-y_c)$ を通過する確率が、弾性から塑性へ移行する確率であり、[図－4] における δ が、その時の塑性歪みとなる。

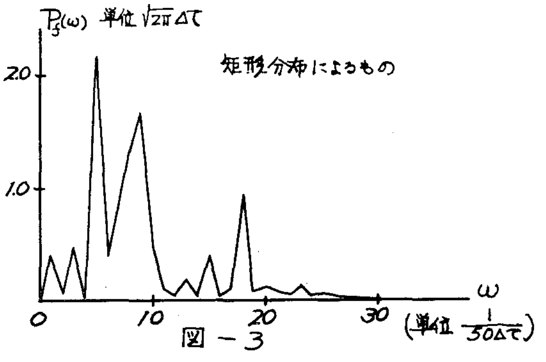
現在の段階では、計算例が少いので断定し難いが、有効数字1桁で近似している。



図－2



図－4



図－3