

I-27 高速移動分布荷重による半無限弾性板内の応力解析について

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学大学院 正員 ○平島健一
 不動建設 正員 田口莊一

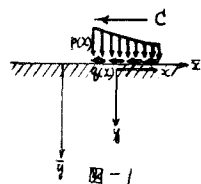
1. まえがき

筆者らはさきに走行荷重による半無限板内の応力分布を解明する目的から、その基礎式である波動方程式の解法についての若干の考察を行なった¹⁾。ここでは、その解法の修正とこれに基づいて数値計算を行なった移動分布荷重作用の場合の計算例を示す。

2. 理論

図-1のよう半無限板の表面に移動荷重 $p(x, y, t)$ が作用した場合、応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は、移動座標系 (ξ, η) を用いると次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (2 + M_L^2 - 2M_T^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \\ \sigma_y &= (2 - M_L^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \\ \tau_{xy} &= (2 - M_T^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \phi &= M_L^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi &= M_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \end{aligned} \right\} (2)$$



ここに ϕ, ψ は (ξ, η) の関数、 $M_L = C/C_L$ 、 $M_T = C/C_T$ 、 C : 荷重速度、 C_L, C_T : 半無限媒質中を伝播する縦波および横波の速度を示す。

境界条件は(3)式で与えられる。 $\sigma_y = -p(x)$, $\tau_{xy} = g(x)$ on $y=0$ ----- (3.1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] = 0 \quad \text{----- (3.2)}$$

したがって、問題は境界条件(3)式のもとで(2)式を解けばよいが、荷重速度 C の変化により

(a) Subsonic (b) Supersonic (c) Transonic の各場合についてそれぞれ解法が異なってくる。

3. 解法

(a) Subsonic Case ($M_L, M_T < 1$) $\alpha_L^2 = 1 - M_L^2$, $\alpha_T^2 = 1 - M_T^2$ とおき、次に定義される Fourier 変換を用いる。 $\bar{\phi}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{i\xi x} dx$, $\bar{\psi}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\xi x} dx$ ----- (4)

(2)式の Fourier 変換を行なうと $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \eta^2} - \alpha_L^2 \xi^2 \bar{\phi} = 0$, $\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \eta^2} - \alpha_T^2 \xi^2 \bar{\psi} = 0$ ----- (5)

この常微分方程式を(3.2)式を考慮して解けば

$$\bar{\phi}(\xi, \eta) = A_1(\xi) e^{-\alpha_L |\xi| \eta}, \quad \bar{\psi}(\xi, \eta) = A_2(\xi) e^{-\alpha_T |\xi| \eta} \quad \text{----- (6)}$$

この逆変換を行ない(1)式に代入すれば応力を求める。なお $A_1(\xi), A_2(\xi)$ は(3.1)式から決まる。

(b) Supersonic Case ($M_L, M_T > 1$) $\beta_L^2 = M_L^2 - 1$, $\beta_T^2 = M_T^2 - 1$ とおき、次式に定義されるような Laplace 変換を導入する。 $\phi(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{\phi}(\xi, y) e^{-\xi x} d\xi$, $\psi(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{\psi}(\xi, y) e^{-\xi x} d\xi$, $x \geq 0$ (7)

これらの逆変換 $\bar{\phi}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(x, y) e^{\xi x} dx$, $\bar{\psi}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi(x, y) e^{\xi x} dx$ (8)

を用いると(2)式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} - \beta_L^2 \xi^2 \bar{\phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \beta_T^2 \xi^2 \bar{\psi} = 0 \quad y \geq 0 \quad (9)$$

このあとは Subsonic の場合と同様に上式を境界条件(3.2)式を考慮して解くと

$$\bar{\phi}(\xi, y) = B_1(\xi) e^{-\beta_L \xi y}, \quad \bar{\psi}(\xi, y) = B_2(\xi) e^{-\beta_T \xi y} \quad (10)$$

これから $\phi(x, y), \psi(x, y)$ を求め、(1)式に代入すれば応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ がそれぞれ求まる。

(C) Transonic Case ($M_L < 1, M_T > 1$) $\gamma_L^2 = 1 - M_L^2, \gamma_T^2 = M_T^2 - 1$ とかくと基礎方程式(2)式は

$$\gamma_L^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \gamma_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

上式(7), (8)式で定義されるような Laplace 変換を用いて解くと

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1(\zeta) e^{-\beta_L \zeta y} + c_1(\zeta) e^{i \beta_L \zeta y} \\ \Psi(x, y) &= c_2(\zeta) e^{-\beta_T \zeta y} + c_2(\zeta) e^{\beta_T \zeta y} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

境界条件(3-2)式から $c_2(\zeta) = 0$ となるが, $\Phi(x, y)$ の係数 $c_1(\zeta), c_2(\zeta)$ に対してはこの境界条件式からだけではそれら相互の関係が得られず, したがって純数学的には解析不能と考えられる。しかし若干の仮定を認めるならば工学的に満足できる解が得られるようであるが, それについては現在検討中である。

4. 計算例

図-2に示すような鉛直等分布移動荷重が作用

する場合は $p(x) = p_0 f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

と取りて計算を行えばよい。Subsonic および Supersonic の場合に対する応力分布 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を図-3(a)(b)(c)に示す。図-4に示す水平等分布荷重作用の場合に対しても全く同様の手法により応力分布を求めることができる。(図省略)

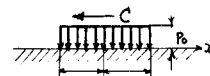


図-2

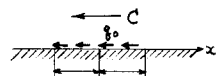


図-4

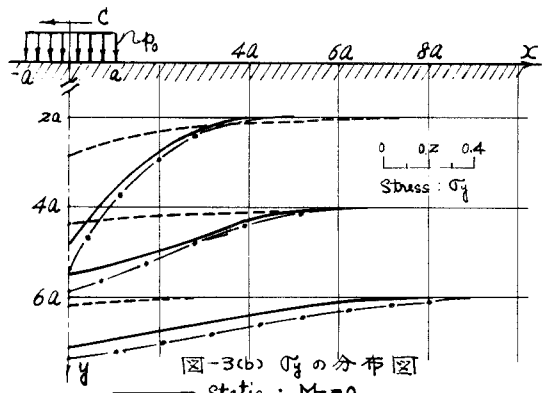


図-3(b) σ_y の分布図

—— Static: $M_T = 0$
 - - - Subsonic: $M_T = 0.5, M_{T_h} = 2$
 Supersonic: $M_T = 2.5, M_{T_h} = 2$

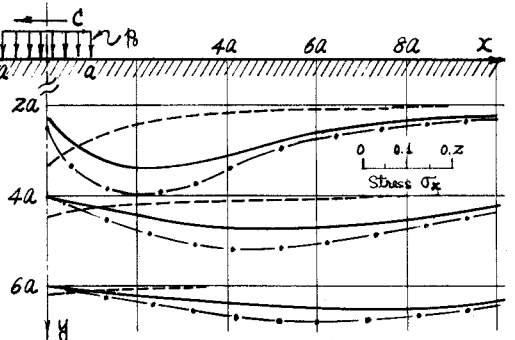


図-3(a) σ_x の分布図

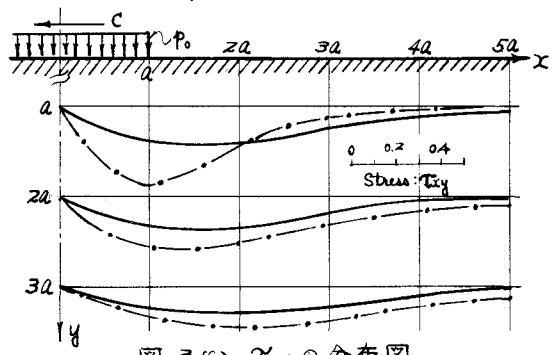


図-3(c) τ_{xy} の分布図

5. おさひ

J. Cole & J. Huth は鉛直集中移動荷重が作用する場合に対してのみ, Subsonic, Supersonic, Transonic についての解を与えてゐるが²⁾, いくつかの疑問点がある。紙面の都合上それらについては講演会当日に譲る。

参考文献

- 1) 丹羽, 小林, 平島 昭和38年度関西支部年次学術講演会概要 PP. 5~6
- 2) J. Cole, J. Huth "Stresses Produced in a Half Plane by Moving Loads" Jour. Appl. Mech. PP. 433~436 (1958. 12)