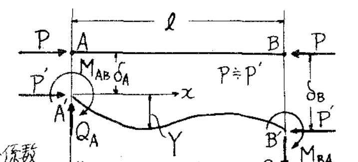
I—21 不完全剛結節点をもつ直線材ラーメンの安定

九州大学工学部 正員 山崎 徳也
〃 〃 ○南 旭

骨組構造の解析において通常用いられる仮定は，節点が剛結かヒンヂの何れかに止まるが，実在構造物の節点にはその中間的なもの，すなわち不完全剛結を示すものが多いことは周知の事実である。この不完全剛結特性を取り入れたラーメンの解析に関しては，モーメント—回転角特性曲線を直線と近似するか，正確に実験曲線に準拠するかの二法に分れ，前者の仮定をたわみ角法に応用したのは Baker, Rathbun, Johnston および著者などであり，後者に関するもので認めるべきものは未だなく，モーメント—回転角特性曲線を折線で近似することにより前者より実状に近づかしめ，これをたわみ角法に導入した著者等の研究があるに過ぎない。骨組の座屈に関しても同様に節点構造は剛結またはヒンヂの両極端にとどまり中間的な不完全剛結節点を考察したものはなく，単一材について，その材端が弾性固定である場合の座屈[1]が取り扱われているにすぎず，構造物に適用することはできない。本研究は不完全剛結節点をもつ骨組構造にモーメント—回転角特性曲線を直線と近似する前者の仮定を用いて，座屈たわみ角式[2]にその影響を導入しようとするものである。

(I) 両端に不完全剛結節点をもつ場合

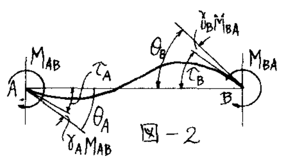


図—1

いま軸力 P を受ける等断面直線材 AB の安定がわずかに破れて $A'B'$ に移った状態を考える（図—1参照）。任意点 x における変位を Y，M_x を曲げモーメントとすれば $\frac{d^2Y}{dx^2}=-\frac{M_x}{EI\tau}$ ------(1)

ここに I は部材の断面二次モーメント，E はヤング係数，τ は T を座屈係数とすれば $\tau=T/E$ である。$M_x=M_{AB}-(M_{AB}+M_{BA})x/l-(\delta_B-\delta_A)Px/l+PY$ ---(2)

また材端のせん断力は $Q_A=Q_B=-(M_{AB}+M_{BA})/l-(\delta_B-\delta_A)P/l$ ----(3)



図—2

しかるに図—2に示すごとく A, B 両材端は不完全剛結点であるため A 点では $\gamma_A M_{AB}$，B 点では $\gamma_B M_{BA}$ だけ余分に回転することになる。今 A 点に $\gamma_A M_{AB}$，B 点に $\gamma_B M_{BA}$ の回転を与えたときの任意点のたわみを y_1 とすれば

$$y_1=\gamma_A M_{AB}l\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{2x^2}{l^2}+\frac{x}{l}\right)+\gamma_B M_{BA}l\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^2}{l^2}\right) \quad \text{------------(4)}$$

(2)式中の Y は実たわみであるから，不完全剛結効果によるたわみを考慮すれば次の関係が成立する。

$$Y=y-y_1 \quad \text{-----(5)}$$

式(1)に式(2),(4),(5)を代入すれば次式がえられる。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI\tau}y=-\frac{M_{AB}}{EI\tau}+\frac{M_{AB}+M_{BA}}{EI\tau}\cdot\frac{x}{l}+\frac{(\delta_B-\delta_A)P}{EI\tau}\cdot\frac{x}{l}+\frac{P}{EI\tau}\left\{\gamma_A M_{AB}l\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{2x^2}{l^2}+\frac{x}{l}\right)+\gamma_B M_{BA}l\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^2}{l^2}\right)\right\}+\gamma_A M_{AB}l\left(\frac{6x}{l^3}-\frac{4}{l^2}\right)+\gamma_B M_{BA}l\left(\frac{6x}{l^3}-\frac{2}{l^2}\right)$$

ここで $\frac{P}{EI\tau}=\frac{Z^2}{l^2}$，$\frac{2EI\tau}{l}\gamma_A=\alpha$，$\frac{2EI\tau}{l}\gamma_B=\beta$ の置換をし，境界条件として $x=0$ で $y=0$；$x=l$ で $y=\delta_B-\delta_A$ を用うれば，所要の弾性曲線は上式をといて次のごとくえられる。

$$y=\frac{M_{AB}}{EI\tau}\cdot\frac{l^2}{Z^2}\cdot\cos\frac{Zx}{l}-\frac{l^2(M_{AB}\cdot\cos Z+M_{BA})}{EI\tau\cdot Z^2\sin Z}\cdot\sin\frac{Zx}{l}-\frac{M_{AB}}{EI\tau}\cdot\frac{l^2}{Z^2}+\frac{M_{AB}+M_{BA}}{EI\tau}\cdot\frac{lx}{Z^2}+\frac{\delta_B-\delta_A}{l}\cdot x+\frac{\alpha l^2 M_{AB}}{2EI\tau}\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{2x^2}{l^2}+\frac{x}{l}\right)+\frac{\beta l^2 M_{BA}}{2EI\tau}\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

両材端のたわみ角は $\theta_A=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$，$\theta_B=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}$ なるゆえ直ちに次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{2EI\tau}{l}\cdot\theta_A&=\left(\frac{2}{Z^2}-\frac{2\cot Z}{Z}+\alpha\right)\cdot M_{AB}-\left(\frac{2}{Z\sin Z}-\frac{2}{Z^2}\right)\cdot M_{BA}+\frac{2EI\tau}{l}\cdot\frac{\delta_B-\delta_A}{l}\\ \frac{2EI\tau}{l}\cdot\theta_B&=-\left(\frac{2}{Z\cdot\sin Z}-\frac{2}{Z^2}\right)\cdot M_{AB}+\left(\frac{2}{Z^2}-\frac{2\cot Z}{Z}+\beta\right)\cdot M_{BA}+\frac{2EI\tau}{l}\cdot\frac{\delta_B-\delta_A}{l}\end{aligned}\right] \quad \text{-------(6)}$$

(6)式を M_{AB}, M_{BA} について連立に解けば所要のたわみ角式がえられる。すなわち

$$M_{AB}=\frac{2EK}{P}\left[\{A_{(z)}+\beta D_{(z)}\}\theta_A+B_{(z)}\theta_B-\{E_{(z)}+\beta\cdot D_{(z)}\}\cdot R\right]$$
$$M_{BA}=\frac{2EK}{P}\left[B_{(z)}\theta_A+\{A_{(z)}+\alpha\cdot D_{(z)}\}\theta_B-\{E_{(z)}+\alpha\cdot D_{(z)}\}\cdot R\right] \quad \text{-------}(7)$$

ここに $K=\frac{I_c}{\ell}$, $R=\frac{\delta_B-\delta_A}{\ell}$, $C_{(z)}=\frac{1}{z^2}-\frac{\cot z}{z}$, $S_{(z)}=\frac{1}{z\cdot\sin z}-\frac{1}{z^2}$,

$A_{(z)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{(z)}}{C_{(z)}^2-S_{(z)}^2}$, $B_{(z)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{S_{(z)}}{C_{(z)}^2-S_{(z)}^2}$, $D_{(z)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{C_{(z)}^2-S_{(z)}^2}$, $E_{(z)}=A_{(z)}+B_{(z)}$, $P=1+(\alpha+\beta)A_{(z)}+\alpha\cdot\beta\cdot D_{(z)}$,

(Ⅱ) 上記(Ⅰ)の両端に剛域を考慮する場合

図-3のごとく剛域を b_{AB}, b_{BA} として M と $\bar{M}$ との関係を求めると次のごとくなる。

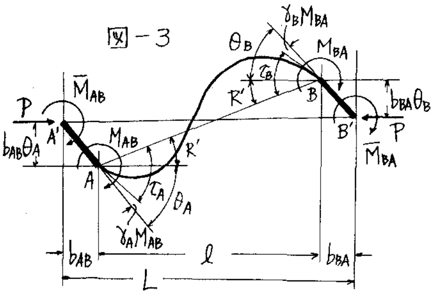


図-3

$$\bar{M}_{AB}=\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)M_{AB}+\frac{b_{AB}}{\ell}M_{BA}-P\cdot b_{AB}\cdot\theta_A\cdot\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)-P\cdot b_{BA}\,\theta_B\,\frac{b_{AB}}{\ell}$$
$$\bar{M}_{BA}=\frac{b_{BA}}{\ell}M_{AB}+\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)M_{BA}-P\,b_{AB}\,\theta_A\,\frac{b_{BA}}{\ell}-P\cdot b_{BA}\,\theta_B\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right) \quad \text{---}(8)$$

剛域端モーメント $\bar{M}_{AB}$, $\bar{M}_{BA}$ は式(7)を式(8)に代入すれば得られるが,(7)式中の部材角は部材AB間の R' (図-3参照)であり これを部材 $A'B'$ 間の部材角 R に変えるため(7)式における R を $\left(R-\frac{b_{AB}}{\ell}\theta_A-\frac{b_{BA}}{\ell}\theta_B\right)$ として代入することが必要となる。結果は次のごとし(表-1参照)。

$$\bar{M}_{AB}=\frac{2EK}{P}\left(D_{AA}\,\theta_A+D_{AB}\,\theta_B-D_{AC}\cdot R\right)$$
$$\bar{M}_{BA}=\frac{2EK}{P}\left(D_{BA}\,\theta_A+D_{BB}\,\theta_B-D_{BC}\cdot R\right) \quad \text{------}(9)$$

ただし $P=1+(\alpha+\beta)A_{(z)}+\alpha\cdot\beta\cdot D_{(z)}$

表-1 2

D_{AA}	$\left\{A_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+B_{(z)}\frac{b_{AB}}{\ell}-\frac{b_{AB}}{2\ell}Z^2\right\}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+\left\{B_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+A_{(z)}\frac{b_{AB}}{\ell}\right\}\cdot\frac{b_{AB}}{\ell}$ $+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)^2-\frac{b_{AB}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\beta+\left\{D_{(z)}\frac{b_{AB}^2}{\ell^2}-\frac{b_{AB}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\alpha$ $-\left\{\frac{b_{AB}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)\cdot Z^2\cdot D_{(z)}\right\}\alpha\cdot\beta$	D_{BB}	$\left\{A_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+B_{(z)}\frac{b_{BA}}{\ell}-\frac{b_{BA}}{2\ell}\cdot Z^2\right\}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+\left\{B_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+A_{(z)}\frac{b_{BA}}{\ell}\right\}\cdot\frac{b_{BA}}{\ell}$ $+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)^2-\frac{b_{BA}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)\cdot Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\alpha+\left\{D_{(z)}\frac{b_{BA}^2}{\ell^2}-\frac{b_{BA}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\cdot\beta$ $-\left\{\frac{b_{BA}}{2\ell}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)\cdot Z^2\cdot D_{(z)}\right\}\alpha\cdot\beta$
D_{AB}	$\left\{B_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+A_{(z)}\frac{b_{BA}}{\ell}\right\}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+\left\{A_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+B_{(z)}\frac{b_{BA}}{\ell}-\frac{b_{BA}}{2\ell}\cdot Z^2\right\}\cdot\frac{b_{AB}}{\ell}$ $+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)\frac{b_{BA}}{\ell}-\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}\cdot Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\beta+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)\frac{b_{AB}}{\ell}-\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}\cdot Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\alpha$ $-\left\{\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}\cdot Z^2\cdot D_{(z)}\right\}\alpha\cdot\beta$	D_{BA}	$\left\{B_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+A_{(z)}\frac{b_{AB}}{\ell}\right\}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)+\left\{A_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)+B_{(z)}\frac{b_{AB}}{\ell}-\frac{b_{AB}}{2\ell}\cdot Z^2\right\}\cdot\frac{b_{BA}}{\ell}$ $+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)\frac{b_{BA}}{\ell}-\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\beta+\left\{D_{(z)}\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)\frac{b_{AB}}{\ell}-\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}\cdot Z^2\cdot A_{(z)}\right\}\alpha$ $-\left\{\frac{b_{AB}b_{BA}}{2\ell^2}\cdot Z^2\cdot D_{(z)}\right\}\alpha\cdot\beta$
D_{AC}	$E_{(z)}\cdot\left(1+\frac{2b_{AB}}{\ell}\right)+D_{(z)}\cdot\left(1+\frac{b_{AB}}{\ell}\right)\cdot\beta+D_{(z)}\frac{b_{AB}}{\ell}\cdot\alpha$	D_{BC}	$E_{(z)}\cdot\left(1+\frac{2b_{BA}}{\ell}\right)+D_{(z)}\cdot\left(1+\frac{b_{BA}}{\ell}\right)\alpha+D_{(z)}\frac{b_{BA}}{\ell}\cdot\beta$

今軸圧縮力が存在しない場合は $\lim_{z\to 0}C_{(z)}=\frac{1}{3}$, $\lim_{z\to 0}S_{(z)}=\frac{1}{6}$ となり $A_{(z)}=2$, $B_{(z)}=1$, $D_{(z)}=3$, $E_{(z)}=3$ となる。したがって(9)式中の係数にこれらを代入して $Z\to 0$ とすれば不完全剛結特性と剛域とを考慮した直線材たわみ角式がえられ,その係数値は表-2に示す値となる。

(9)式中の各係数はかなり複雑なので,あらかじめ $\frac{D_{AA}}{P}$, ……, $\frac{D_{BC}}{P}$ の値を電子計算機で算出し,グラフ化しておけば実用上便利であり,次の計算例はこれらグラフを利用して求めたものである。

表-2

D_{AA}	$2+3\beta+6(1+\beta)\frac{b_{AB}}{\ell}+3(2+\alpha+\beta)\frac{b_{AB}^2}{\ell^2}$	D_{AC}	$3(1+\beta)+3(2+\alpha+\beta)\frac{b_{AB}}{\ell}$	D_{BC}	$3(1+\alpha)+3(2+\alpha+\beta)\frac{b_{BA}}{\ell}$		
D_{BB}	$2+3\alpha+6(1+\alpha)\frac{b_{BA}}{\ell}+3(2+\alpha+\beta)\frac{b_{BA}^2}{\ell^2}$	D_{AB} D_{BA}	$1+3(1+\alpha)\frac{b_{AB}}{\ell}+3(1+\beta)\frac{b_{BA}}{\ell}+3(2+\alpha+\beta)\frac{b_{AB}b_{BA}}{\ell^2}$			P	$1+2(\alpha+\beta)+3\alpha\beta$

(Ⅲ) 計算例

図-4のごとき対称門型ラーメンの梁BCの座屈荷重を求める。いま梁BCの両端に不完全剛結節点があるものとし,節点BおよびCの横変位はないものとする。なお $\frac{b_{BC}}{\ell_2}=\frac{b_{CB}}{\ell_2}=0.05$, $\frac{b_{BA}}{\ell_1}=\frac{b_{CD}}{\ell_1}=0.05$, $\frac{I_1}{\ell_1}=\frac{I_2}{\ell_2}=K$, $\alpha=\beta=2EK\gamma=0.5$ とする。

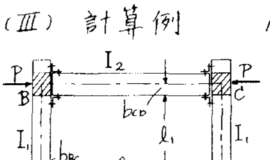


図-4

不完全剛結の影響は表-3に示すごとくで,その効果は充分認められる。

表-3

	不完全剛結無視		不完全剛結考慮	
	剛域無視	剛域考慮	剛域無視	剛域考慮
Z	1.465π	1.430π	1.295π	1.285π

本研究は文部省科学研究費の補助をうけた。

文献 (1) 中川有三:長柱の両端の剛さと挫屈荷重との関係, 日本機械学会論文集 4巻14号,昭和13年2月.

(2) 樋浦大三:撓角法による構造物の安定論, 土木学会誌,昭和15年10.11月, 建築学大系(座屈論) 12巻,昭和35年