

I-18 S型部材を持つ立体ラーメンの解法

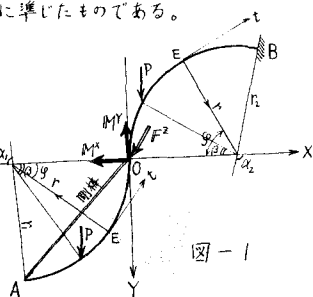
九州大学工学部 正員 山崎徳也

建設省 都市局 正員 〇彦坂 照

[I] 緒言 本論文は部材の任意点に変曲点を持つS型曲線部材に関するたわみ角式をもとめ、これを用いてS型部材を有する立体ラーメンの解析を行うことを目的としたものである。既往の研究としては、小松氏の弾性方程式によるものがあり、特に連続S型曲線桁橋に対する有用な解法といえるが、本法では演算過程としてのカーニ法の拡張が容易である上に、Müller-Breslauの原理を用いて影響線を簡明に算定しうるなどの利点がある。一般に部材に働く力は部材を含む面内の力と、面に垂直な力とに分けられ、前者には平面のたわみ角式を、後者には立体たわみ角式を必要とする。S型部材を持つ立体ラーメンを解くに当っては両者を併用すればよい。これら諸式は何れも片持バリエーションを静定基本系としてエネルギー法を用いた既往の研究と同じ手法で誘導した。以下において特に説明を加えない記号および符号はこれら既往研究に準じたものである。

[II] 立体たわみ角式の誘導

固定座標 (X, Y, Z) をとり、X-Y平面上に等断面で半径および中心角がそれぞれ r_1, r_2 および α_1, α_2 の2つの円弧が原点Oで接して構成されるS型部材ABを考える。図-1に示すごとく自由端AとOを剛棒で結び、この棒端Oに M^x (Xの負軸方向に右まわりのモーメント)、 M^y (Yの負軸方向に右まわりのモーメント) および F^z (Zの負軸方向の力) の3不静定量を与える。部材の半径および切線方向に流動座標 (r, t) をとれば、任意点Eにおけるモーメントは次式であらわされる。



$$A \sim O: \begin{cases} M^r = M^x \cos \theta + M^y \sin \theta + F^z r_1 \sin \theta + M_0^r \\ M^t = -M^x \sin \theta + M^y \cos \theta - F^z r_1 (1 - \cos \theta) + M_0^t \end{cases} \dots (1)_a \quad O \sim B: \begin{cases} M^r = -M^x \cos \theta - M^y \sin \theta + F^z r_2 \sin \theta + M_0^r \\ M^t = -M^x \sin \theta + M^y \cos \theta + F^z r_2 (1 - \cos \theta) + M_0^t \end{cases} \dots (1)_b$$

ここに M_0^r, M_0^t は荷重による任意点Eのrおよびt軸に関する

モーメントで集中荷重と等分布荷重とに対する値を表-1に示す。

(1)式のモーメントによって生ずる歪エネルギーをWとすれば

$$W = \int_A^B \frac{(M^r)^2}{2EI_r} dr + \int_A^B \frac{(M^t)^2}{2GJ} dt$$

Castiglianoの定理より、棒端Oの変形成分は次のごとくえられる。

$$\begin{cases} \theta^x = \frac{\partial W}{\partial M^x} = \frac{1}{EI_r} (a_1 M^x + b_1 M^y + c_1 F^z + L_1) \\ \theta^y = \frac{\partial W}{\partial M^y} = \frac{1}{EI_r} (a_2 M^x + b_2 M^y + c_2 F^z + L_2) \\ -\Delta Z = \frac{\partial W}{\partial F^z} = \frac{S}{EK_r} (a_3 M^x + b_3 M^y + c_3 F^z + L_3) \end{cases} \dots (2)$$

ただし、部材長 $S = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2$ 、剛度 $K_r = \frac{EI_r}{S}$ で、さらに $\frac{EI_r}{GJ} = \chi$ 、 $\frac{r}{S} = \bar{r}$ とおけば a, b, c, L などは次式の内容となる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1 \{ \bar{r}_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \chi (\bar{r}_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) \} + \bar{r}_2 \{ \bar{r}_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \chi (\bar{r}_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \} \right], \\ b_1 &= \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1 \{ \bar{r}_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \chi (\bar{r}_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) \} + \bar{r}_2 \{ \bar{r}_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \chi (\bar{r}_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \} \right], \\ c_1 &= a_3 = \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1^2 \{ \sin^2 \alpha_1 + \chi (1 - \cos \alpha_1) \} - \bar{r}_1^2 \{ \sin^2 \alpha_1 + \chi (1 - \cos \alpha_1) \} \right], \\ c_2 &= b_3 = \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1^2 \{ \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \chi (\alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - 2 \sin \alpha_1) \} - \bar{r}_1^2 \{ \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \chi (\alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - 2 \sin \alpha_1) \} \right], \\ b_2 &= a_2 = \frac{1}{2} (1 - \chi) \left[\bar{r}_1 \sin^2 \alpha_1 + \bar{r}_2 \sin^2 \alpha_2 \right], \\ c_3 &= \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1^2 \{ \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \chi (\alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - 2 \sin \alpha_1) \} + \bar{r}_2^2 \{ \alpha_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \chi (\alpha_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - 2 \sin \alpha_2) \} \right], \\ L_1 &= \bar{r}_1 \int_0^{\alpha_1} (M_0^r \cos \theta - \chi M_0^t \sin \theta) d\theta - \bar{r}_2 \int_0^{\alpha_2} (M_0^r \cos \theta + \chi M_0^t \sin \theta) d\theta, \\ L_2 &= \bar{r}_1 \int_0^{\alpha_1} (M_0^r \sin \theta + \chi M_0^t \cos \theta) d\theta - \bar{r}_2 \int_0^{\alpha_2} (M_0^r \sin \theta - \chi M_0^t \cos \theta) d\theta, \\ L_3 &= \bar{r}_1^2 \int_0^{\alpha_1} (M_0^r \sin \theta + \chi M_0^t \cos \theta) d\theta - \bar{r}_2^2 \int_0^{\alpha_2} (M_0^r \sin \theta - \chi M_0^t \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

一方部材端の変形成分と棒端Oのそれとの関係性を求めれば次の如くなる。

$$\begin{cases} \theta^x = \theta_A^r \cos \alpha_1 - \theta_A^t \sin \alpha_1 + \theta_B^r \cos \alpha_2 + \theta_B^t \sin \alpha_2 \\ \theta^y = \theta_A^r \sin \alpha_1 + \theta_A^t \cos \alpha_1 + \theta_B^r \sin \alpha_2 - \theta_B^t \cos \alpha_2 \\ -\Delta Z = \theta_A^r \bar{r}_1 \sin \alpha_1 - \theta_A^t \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_1) - \theta_B^r \bar{r}_2 \sin \alpha_2 - \theta_B^t \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2) - (\Delta Z_A - \Delta Z_B) \end{cases} \dots (3)$$

(2), (3)式の右辺を等置した上で連立に解けば、不静定力 M^z, M^y およ

び F^z が材端の変形成分で表わされる。部材ABの端モーメントは(1)式

$$\text{より } M_{AB}^r = M^r(\theta=0), \quad M_{AB}^t = M^t(\theta=0), \quad M_{BA}^r = -M^r(\theta=\alpha_2), \quad M_{BA}^t = -M^t(\theta=\alpha_2)$$

としてもとめられる故、所要の立体たわみ角式が次のごとくえられ、

その諸係数をまとめて表-2に示した。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^r &= EK_r (\alpha_A^r \theta_A^r + \beta_A^r \theta_A^t + \gamma_A^r \theta_A^z + \delta_A^r \theta_A^y + A_2 R) + C_{AB}^r \\ M_{AB}^t &= EK_r (\alpha_A^t \theta_A^r + \beta_A^t \theta_A^t + \gamma_A^t \theta_A^z + \delta_A^t \theta_A^y + B_2 R) + C_{AB}^t \\ M_{BA}^r &= EK_r (\alpha_B^r \theta_B^r + \beta_B^r \theta_B^t + \gamma_B^r \theta_B^z + \delta_B^r \theta_B^y + C_2 R) + C_{BA}^r \\ M_{BA}^t &= EK_r (\alpha_B^t \theta_B^r + \beta_B^t \theta_B^t + \gamma_B^t \theta_B^z + \delta_B^t \theta_B^y + D_2 R) + C_{BA}^t \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

$$\text{ここに } C_{AB}^r = A_1 L_1 - A_2 L_2 + A_3 L_3, \quad C_{AB}^t = B_1 L_1 - B_2 L_2 + B_3 L_3$$

$$C_{BA}^r = C_1 L_1 - C_2 L_2 + C_3 L_3 - M_{AB}^r, \quad C_{BA}^t = D_1 L_1 - D_2 L_2 + D_3 L_3 - M_{AB}^t$$

さらに材端における

$$\left(\begin{aligned} F_A^z &= \frac{1}{S} EK_r (A_3 \theta_A^r + B_3 \theta_A^t + C_3 \theta_A^z + D_3 \theta_A^y + \bar{D}_3 R) + F_A^z \\ F_B^z &= -\frac{1}{S} EK_r (A_3 \theta_B^r + B_3 \theta_B^t + C_3 \theta_B^z + D_3 \theta_B^y + \bar{D}_3 R) + F_B^z \end{aligned} \right) \text{----- (5)}$$

$$\text{ここに } F_A^z = \frac{1}{S} (\bar{D}_3 L_1 - \bar{D}_3 L_2 + \bar{D}_3 L_3), \quad F_B^z = F_{OB}^z - F_A^z$$

(III) 平面たわみ角式の誘導

部材を含む面内に働く力に対応する不静定力 M^z および F^z, F^y と棒端Oに働かせ、

部材の任意点、の曲げモーメントを求めれば次のごとく表わされる。(図-2 参照)

$$\left. \begin{aligned} A \sim O: \quad M^z &= F^x r_1 \sin \theta + F^y r_1 (1 - \cos \theta) - M^z + M_0^z \\ O \sim B: \quad M^z &= -F^x r_2 \sin \theta - F^y r_2 (1 - \cos \theta) + M^z + M_0^z \end{aligned} \right\} \text{ここに } M_0^z \text{ は任意点Eの荷重によるモーメントである。}$$

以下の誘導過程は [I] と全く同じく、(2)式中の係数 $a_1, b_1, c_1, \dots, a_3, b_3, c_3$ および荷重項に関する諸値 L_1, L_2, L_3 の内容が異り、

それぞれ次のごとくえられる。 $a_1 = \frac{1}{2} \{ \bar{r}_1^2 (\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \bar{r}_1^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \}$,

$$b_1 = a_2 = \frac{1}{2} \{ \bar{r}_1^2 (1 - \cos \alpha_1)^2 + \bar{r}_1^2 (1 - \cos \alpha_2)^2 \}, \quad c_1 = a_3 = \bar{r}_1^2 (1 - \cos \alpha_1) - \bar{r}_1^2 (1 - \cos \alpha_2),$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \{ \bar{r}_2^2 (3\alpha_1 - 4 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \bar{r}_2^2 (3\alpha_2 - 4 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \}, \quad c_2 = 1,$$

$$c_3 = b_3 = \bar{r}_1^2 (\alpha_1 - \sin \alpha_1) - \bar{r}_1^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2), \quad L_1 = \bar{r}_1^2 \int_0^{\alpha_1} M_0^z \sin \theta d\theta - \bar{r}_1^2 \int_0^{\alpha_2} M_0^z \sin \theta d\theta,$$

$$L_2 = \bar{r}_1^2 \int_0^{\alpha_1} M_0^z (1 - \cos \theta) d\theta - \bar{r}_1^2 \int_0^{\alpha_2} M_0^z (1 - \cos \theta) d\theta, \quad L_3 = \bar{r}_1 \int_0^{\alpha_1} M_0^z d\theta + \bar{r}_1 \int_0^{\alpha_2} M_0^z d\theta,$$

以下の誘導演算を省略して結果のみを示せば次式となり、係数を

表-3にまとめた。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^z &= EK_r [\alpha_A^z \theta_A^z + \beta_A^z \theta_A^y - (\alpha_A + \beta_A) R + \alpha_A \theta_A^z] + C_{AB}^z \\ M_{BA}^z &= EK_r [\alpha_B^z \theta_B^z + \beta_B^z \theta_B^y - (\alpha_B + \beta_B) R + \alpha_B \theta_B^z] + C_{BA}^z \\ H &= -\frac{1}{S} EK_r [\delta_A^z \theta_A^z + \delta_B^z \theta_B^y - (\delta_A + \delta_B) R + \delta_C \theta_A^z] + H \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

$$\text{ここに } C_{AB}^z = A_1 L_1 - A_2 L_2 + A_3 L_3, \quad C_{BA}^z = B_1 L_1 - B_2 L_2 + B_3 L_3 - M_{AB}^z, \quad H = -\frac{1}{S} (C_1 L_1 - C_2 L_2 + C_3 L_3),$$

(IV) 立体ラーメンの解法

(4), (5), (6)式の面材端モーメント6つとせん断力6つを用いて各節点毎に6ヶ

の釣合式を立てれば各節点の未知数6ヶと対応する故、未知変形量に関する連立

方程式を解いてモーメント、せん断力が求まる。なお Müller-Breslau の原理を用いれば極めて容易に影響線が算定でき、一例

として図-3のごとき立体ラーメンの影響線と求め、その結果を図-4に示した。(本研究には文部省科学研究費の補助を受けた)

[参考文献] (1) 小松定夫 “連続S型曲線桁橋の構造解析” 第13回応用力学連合講演会・論文抄録集 第1部 38年9月
(2) 山崎・太田 “円弧部材を含む立体ラーメンの解法” 土木学会、第17回年次学術講演会 概要 37年5月

表-2

α_A^r	$-A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_1 - A_3 \bar{r}_1 \sin \alpha_1$	α_B^r	$-C_1 \cos \alpha_2 + C_2 \sin \alpha_2 + C_3 \bar{r}_2 \sin \alpha_2$
α_A^t	$B_1 \sin \alpha_1 + B_2 \cos \alpha_1 + B_3 \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_1)$	α_B^t	$-D_1 \sin \alpha_2 - D_2 \cos \alpha_2 + D_3 \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2)$
β_A^r, β_B^r	$-A_1 \cos \alpha_2 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \bar{r}_1 \sin \alpha_2$	β_A^t, β_B^t	$-B_1 \sin \alpha_2 - B_2 \cos \alpha_2 + B_3 \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_2)$
γ_A^r, γ_B^r	$A_1 \sin \alpha_2 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_2)$	γ_A^t, γ_B^t	$-C_1 \sin \alpha_2 - C_2 \cos \alpha_2 + C_3 \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2)$
δ_A^r, δ_B^r	$-A_1 \sin \alpha_2 - A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_2)$	δ_B^r, δ_A^t	$-B_1 \cos \alpha_2 + B_2 \sin \alpha_2 + B_3 \bar{r}_1 \sin \alpha_2$

ここに $A_1, A_2, A_3, \dots, D_1, D_2, D_3$ は次の如く Matrix 表示できる。
たまた $\bar{D}_{mn} = D_{mn} / D$ と
 D_{mn} は $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ の m - n 要素の1行1列式である。
 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 \\ -\bar{r}_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \\ \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_1) \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 \\ -\bar{r}_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \\ \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2) \end{pmatrix}$

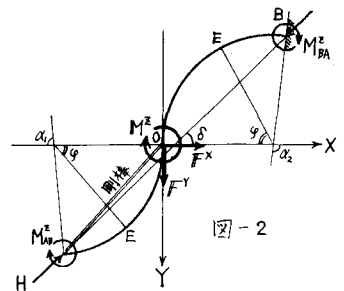


表-3

α_A	$-A_1 \bar{r}_1 \sin \alpha_1 + A_2 \bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_1) - A_3$	α_B	$-B_1 \bar{r}_2 \sin \alpha_2 + B_2 \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2) + B_3$
β_A, β_B	$-A_1 \bar{r}_2 \sin \alpha_2 + A_2 \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2) + A_3$	δ_A	$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_1$
δ_B	$B_1 \cos \alpha_2 + B_2 \sin \alpha_2$	δ_C	$-C_1 \cos \alpha_2 - C_2 \sin \alpha_2$

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{r}_1 \sin \alpha_1 \\ -\bar{r}_1 (1 - \cos \alpha_1) \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_2 \sin \alpha_2 \\ \bar{r}_2 (1 - \cos \alpha_2) \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

