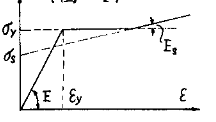
I―14　塑性解析に拡張したエネルギー法

九州大学 工学部　正員　山崎　徳也
学生員　○太田　俊昭

[I] 緒言　構造物の弾性解析において変分原理を基盤とするカスチリアーノの定理および最小仕事の原理などが導かれ、これよりたわみ角法，3連，4連モーメントの定理あるいはモーメント分配法など，構造力学において欠くべからざる理論の大半が導き出されたことは周知の通りである。他方塑性分野においても A.Nadai[1], G.Colonnetti[2], H.M.Westergaard[3], P.Hodge と W.Prager[4], Kachanov[4], H.J.Greenberg[5], Suida[6], B.Rawlings[7][8] などによって"Complementary Minimum Principle"が原理的に証明され，これに基くエネルギー法がそれぞれ提案されているが，いまだ弾性のごとく，この原理のもつ普遍性と簡易性とを充分いかして広く実用に供せしめる域にまでは至っていない。このことは塑性領域を考慮し，補足エネルギーを忠実に求める場合，断面形状によっては，式型ならびに演算が極めて煩雑となり，実用上その意義を失うことに由来する。本法はその欠点を排除する目的で M-Φ 近似直線を理論的に導入し，これに基くエネルギー法を誘導し，これを構造物の塑性解析に適用せしめた。その特色は弾性の場合に準じた計算手法の簡易性，任意形状断面をもつ部材および任意荷重を受ける部材に対して適用しうる普遍性，ならびに Plastic Hinge 法を凌駕する近似性などにある。

(図―1)



[II] 補足エネルギー　曲げ応力を受けた部材が弾塑性挙動および歪硬化を生ずる場合，塑性解析に慣用の仮定に従えば，応力-歪の関係ならびに断面の応力分布は図-1，図-2のごとく考えられ，これよりモーメント M と曲率 Φ の関係は図-3のごとく求められる。すなわち OA は $M=EI\Phi$ で弾性域におけるフックの法則を示し，A～B部は図-2(b)のごとき弾塑性応力状態における M-Φ-曲線をあらわし，さらに B～C部で $M=M_p$ なる塑性ヒンジを形成して応力分布は図-2(c)に移行する。Cより先は図-2(d)に示されるごとく歪硬化を生じ，M-Φ の関係[9]は $M=E_sI\Phi+\sigma_sZ$ の直線となる。一般に単位長さ当りの補足エネルギーは $\frac{d}{ds}U=\iint\varepsilon\, d\sigma\, dA$ で定義され，弾塑性域においては図-3の斜線部の面積に一致する。しかるに A～B曲線部が問題の複雑化の主要因を形成する故，これを図-4のごとき折線で置き代え，式表現の簡易化を試みる。考えられる置換条件としては境界における連続条件の他に，ポテンシャル理論より次の条件が挙げられる。すなわち"置換直線よりえられる補足エネルギーと，M-Φ-曲線よりえられるそれとは一致しなければならない"。勿論曲線を多くの折線で置きかえれば近似性は増すが逆に実用性を失う。種々の計算例によって検討を加えた結果一般に $f=M_p/M_y$ の値が 1.5（矩形断面に該当する。）より小さい断面形状においては1つの直線で近似しても，その誤差は充分小さいことが判った。図-8のごとき M-Φ 近似直線を $M=EI\Phi/\kappa+(1-1/\kappa)M_y$ で表わせば，補足エネルギーは

$$U=\int_{E+P}\frac{M^2}{2EI}ds+\kappa_0\int_P\frac{(M-M_y)^2}{2EI}ds \quad \text{------(1)}$$

特に歪硬化の領域まで考慮すれば，(1)式に図-5の斜線部の面積を示す(2)式を加算すればよい。ここに

$$U_s=\kappa_s\int_s\frac{(M-M_s)^2+(M_p-M_s)^2}{2EI}ds \quad \text{---(2)}$$

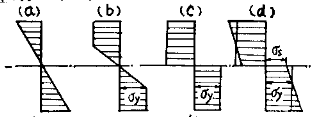
（ただし(1)，(2)式中の積分記号の添字 E，P および S はそれぞれ部材の弾性，弾塑性および歪硬化を生ずる領域を示す。また $\kappa_0=\kappa-1$，$\kappa_s=E/E_s$，$M_y=\sigma_yI/a_0$，$M_p=\sigma_yZ$，$M_s=\sigma_sZ$）。以上はいずれも漸増荷重を対象として考えて来たが図-6のごとく減少荷重のため M が M_1 に達した後，C→D と下降をたどるヒステリシスを示す場合には補足エネルギー U_R は面積 OGCA に面積 CDHG を加算しなければならない。すなわち

$$U_R=\int_P\left[\frac{(M-M_1+EI\Phi_1)^2}{2EI}+C_R\right]ds+\int_E\frac{M^2-M_y^2}{2EI}ds \quad \text{------(3)}$$

ここに $C_R=$ 面積 $OGCA-\frac{1}{2}EI\Phi_1^2$ なる定数である。以上(1)，(2)，(3)式を用うれば Complementary Minimum Principle よりたわみ角ならびに変位は一般に次式で求められる。

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M}\quad,\quad\delta=\frac{\partial U}{\partial P} \quad \text{----------------(4)}$$

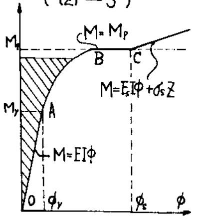
(a)　(b)　(c)　(d)



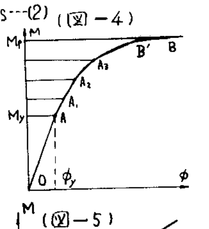
弾性　弾塑性　塑性　歪硬化

(図―2)

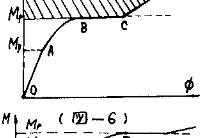
(図―3)



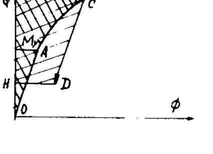
(図―4)



(図―5)



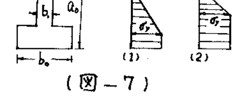
(図―6)



[III] κ-値の算出　κ-値を求める一例として図-7の如きI-形断面をとり弾性域の深さを $2t$ とし，t がフランジとウェブとにある2通りの場合に分けて考えれば

(i) $a_1\leq t\leq a_0$（図-7(1)参照），作用モーメントは $M=2\sigma_yb_0\left[\int_t^{a_0}y\,dy+\frac{1}{t}\int_{a_1}^{t}y^2dy+\frac{b}{t}\int_0^{a_1}y^2dy\right]$　これより $\frac{dM}{dt}=\{A_0-G(t)\}\frac{1}{t^2}$　（ただし $A_0=\frac{a_1^3}{3}(1-\bar{b})$，$G(t)=\int_0^t y^2dy$）よって補足エネルギーは $\frac{d}{ds}U_1=\int_{a_0}^{a_1}\Phi\frac{dM}{dt}dt=\int_{a_0}^{a_1}\frac{\sigma_y}{Et}\cdot\frac{A_0-G(t)}{t^2}dt$

(ii) $0\leq t\leq a_1$（図-7(2)参照），(i)と同様



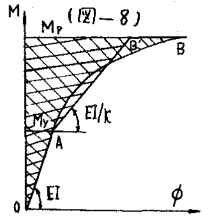
(図―7)

$M = 2\sigma_y b_0 \left[\int_{a_1}^{a_0} y\,dy + \bar{b}\int_t^{a_1} y\,dy + \frac{\bar{b}}{t}\int_0^t y^2 dy \right]$, $\frac{dM}{dt} = -2\sigma_y b_0 b_1 G(t)\frac{1}{t^2}$, よって $\frac{d}{ds}U_2 = \int_{a_1}^{0} \phi \frac{dM}{dt}dt = \int_{a_1}^{0} \frac{\sigma_y}{EI}(-2\sigma_y b_0 b_1)\frac{G(t)}{t^2}dt$

(i),(ii)を合せ考えれば、部材の単位長さ当りの断面に貯わえられる補足エネルギーが次のごとく求められる。

$\frac{d}{ds}U = \frac{d}{ds}U_1 + \frac{d}{ds}U_2 = \frac{M_y^2}{EI}\lambda$ ---------(5)　一方 M−φ 近似直線から算出される補足エネルギーは

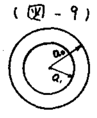
$\frac{d}{ds}U_a = \int_{M_y}^{M_p} \phi\, dM = \frac{K}{2EI}(M_p - M_y)^2 + \frac{1}{EI}M_y(M_p - M_y)$ -----(6)　(5)式と(6)式を等値すれば所要のK-値が次のごとくえられる。 $K = \frac{2M_y\{(1+\lambda)M_y - M_p\}}{(M_p - M_y)^2} = \frac{2(\lambda+1-f)}{(f-1)^2}$ -----------(7) 特に矩形断面では $f = 1.5$, $\lambda = 1$ となり、$K = 4$ をうる。また円管断面のK-値も(7)式と同じ式となり、同式中のλをI-形および円管断面について示せばそれぞれ表-1のごとくなる。



(図-8)

（表-1）

	I-形 断面	円管 断面
λ	$\frac{\{(1-\bar{b})\bar{a}^3 - 3(1-\bar{b})\bar{a}+2\}}{2\{1-(1-\bar{b})\bar{a}^3\}}$	$\frac{(3-\bar{a}^2)}{2(1+\bar{a}^2)}$



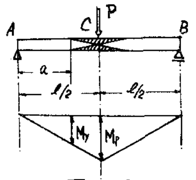
(図-9)

[IV] 解法および誤差の検討

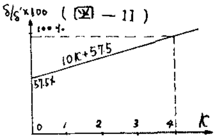
単純ばり、片持ばりおよび門形ラーメンなど代表的なものを選び集中荷重によるたわみを本法と在来のPlastic Hinge法ならびに厳密解としてのΦ-Method[10]とで比較検討を行った。紙面の都合上単純ばり（矩形断面）のみを述べれば次のごとくである。図-10のごとく中央点に集中荷重が働く場合、この点のモーメントが M_p に達した時の同一点の撓みは次のように求められる。(1)式より $U = 2\int_0^{l/2}\frac{M^2}{2EI}dx + 2K_0\int_a^{l/2}\frac{(M-M_y)^2}{2EI}dx$, $M = \frac{x}{a}M_y$

(4)式を用い変位δを求めれば $\delta = \frac{\partial}{\partial P}U = \frac{Pl^3}{48EI}\left[1 + K_0\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{P_y}{P}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{P_y}{P}\right)^3\right\}\right]$, $P = P_p = \frac{3}{2}P_y$ なる故

$\delta = \frac{P_y l^3}{48EI} \times \frac{27 + 4K_0}{18}$ 　他方 Φ-Method によるたわみ δ' は $\delta' = \frac{5}{108}\frac{P_y l^3}{EI}$ よって $\delta/\delta' \times 100$ をKをパラメーターとしてグラフに示せば図-11のごとくなり [III] でえた $K=4$ は97.5%に当り、誤差は2.5%で極めて精度の良いことが判る。一方これをPlastic Hinge法で求めるとたわみは $\frac{1}{32}\frac{P_y l^3}{EI}$ でその誤差は約32%となる。また片持ばり（図-12参照）では2.5%と33%、門形ラーメン（図-13参照）では2.2%と30%の差となり、いずれも厳密解の98%にもおよび、本法の正確さを示しているが、他方在来のPlastic Hinge法は極めて誤差が大きい。



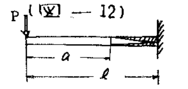
(図-10)



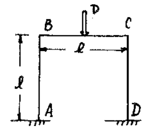
(図-11)

[V] 結語

本論文は構造物の塑性挙動を弾性の場合と同一手法でエネルギー法により解きうることを考察したもので、これを基礎として塑性領域を考慮したたわみ角式や3連、4連モーメントの定理などが容易に導かれ、それぞれの用途に応じてその威力を発揮するものといえる。本研究は文部省科学研究費の補助を受けた。



(図-12)



(図-13)

参考文献

(1) A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids, Engineering Societies Monographs Volume II

(2) G. Colonnetti: De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques, J. Math. Pures Appliq. (9) 17, 1938

(3) H. M. Westergaard: On the Method of Complementary Energy, and Its Application to Structures Stressed beyond the Proportional Limit, to Buckling and Vibrations, and to Suspension Bridges, Proc. A.S.C.E Feb. 1941

(4) P. Hodge and W. Prager: A Variational Principle for Plastic Materials with Strain-hardening, J. Math. Phys. 27. 1948

(5) L. M. Kachanov: The Plastic-Elastic State of Solids, 1946

(6) H. J. Greenberg: Complementary Minimum Principles for an Elastic-Plastic Material, 21 pp., 1948

(7) Swida: ZAMM 1949 Bd XVII

(8) B. Rawlings: Energy Relationships in Plastic Steel Structures, Transac. A.S.C.E. Vol. 128, 1963

(9) C. H. Yang: The Plastic Bahavior of Continuous Beams, Ph. D. Dissertation, Lehigh University, 1951.

(10) K. E. Knudsen, C. H. Yang, B. G. Johnston, L. S. Beedle: Plastic Strength and Deflections of Continuous Beams, Welding Journal May, 1953