I－13　鋼の歪硬化領域における塑性係数

鉄道技術研究所　正員　伊藤文人

鋼材が荷重を受けて降伏点を越え、歪硬化領域に入っているものとすると、この場合の歪と応力の関係は塑性流れ理論によれば、*loading* に対して次式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\delta_{ij}\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}+F\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}\qquad\cdots(1)$$

loading function f は高次の不変量まで考えられるが、普通に行なわれるように2次の不変量 J_2 であらわされるものとする。すなわち、

$$f=J_2=\frac{1}{2}S_{ij}^2\qquad\cdots(2)$$

ここに

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\qquad\cdots(3)$$

である。したがって式(1)は

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\delta_{ij}\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}+F S_{ij}S_{kl}\dot{\sigma}_{kl}\qquad\cdots(4)$$

となる。とくに $i\neq j$ の場合につき、$\sigma_{ij}=\tau_{ij}$, $\dot{\gamma}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}+\dot{\varepsilon}_{ji}$ と書けば

$$\dot{\gamma}_{ij}=\frac{1}{G}\dot{\tau}_{ij}+2F\tau_{ij}S_{kl}\dot{\sigma}_{kl}\qquad\cdots(5)$$

とあらわすことができる。

式(4)および式(5)を整理すれば、歪硬化領域における *loading* 状態での塑性歪と応力の関係を示す式の係数が次のようにあらわされる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{ii}}{\partial\dot{\sigma}_{ii}}&=\frac{1}{E_i}=\frac{1}{E}+F S_{ii}^2\\
-\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{ii}}{\partial\dot{\sigma}_{jj}}&=\frac{\nu_{ij}}{E_i}=\frac{\nu}{E}-F S_{ii}S_{jj}=\frac{\nu_{ji}}{E_j}\\
\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{ii}}{\partial\dot{\sigma}_{kl}}&=\frac{1}{{}_{kl}E_i}=2F S_{ii}\tau_{kl}=\frac{\partial\dot{\gamma}_{kl}}{\partial\dot{\sigma}_{ii}}\qquad(k\neq l)\\
\frac{\partial\dot{\gamma}_{ij}}{\partial\dot{\sigma}_{ij}}&=\frac{1}{G_{ij}}=\frac{1}{G}+4F\tau_{ij}^2\\
\frac{\partial\dot{\gamma}_{ij}}{\partial\dot{\sigma}_{kl}}&=\frac{1}{{}_{kl}G_{ij}}=4F\tau_{ij}\tau_{kl}=\frac{\partial\dot{\gamma}_{kl}}{\partial\dot{\sigma}_{ij}}\qquad(k\neq l,\ i\neq j)
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots(6)$$

これらの係数には、応力状態によって定められる未知の関数 F を含んで居るが　この値を実験的に求めることができれば、必要な値はすべて計算できる。すなわち、或る応力状態において、x 方向の単純引張応力を追加することによって、x 方向の切線係数 E_t を求めることができたものとすれば

$$F=\frac{1}{S_x^2}\left[\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right]\qquad\cdots(7)$$

と書くことができ、これを式(6)に代入すれば、すべての係数を計算することができる。

これを平板の1軸応力状態について計算すれば、$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$であって、$S_{yy}/S_{xx} = -1/2$となることから、式(6)は容易に簡単化されて、Handelman, Pragerの導いたと言われる結果に一致する。

式(6)の示すように、セン断係数G_{ij}はセン断応力τ_{ij}がゼロの場合に限って、弾性状態における値にひとしい。その影響の一例として、σ_xを塑性領域まで加え、次いでσ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}を一定に保ったまゝτ_{yz}のみを増加させた場合について考える。初期においてはσ_x以外の応力は総てゼロであるとする。その時G_{yz}をG_tと書けば

$$\frac{1}{G_t} = \frac{1}{G} + \frac{9\tau^2}{\sigma_x^2}\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}\right) \quad \cdots (8)$$

となる。これを用いてセン断ひずみγとG_tの関係を求めると次式が得られる。

$$\gamma = \frac{\sigma_x}{9}\sqrt{\frac{E}{G^3}}\sqrt{\frac{\left(G/G_t - 1\right)}{\left(E/E_t - 1\right)}}\left(2 + \frac{G}{G_t}\right) \quad \cdots (9)$$

この結果は、楠田博士の求めた式とは一致しないが、考えている荷重変化の間、E_tが一定であると仮定して計算した結果は、同博士の実験結果と良く一致する(右図)。