# I—12　有限変形理論の基礎に関する二,三の考察

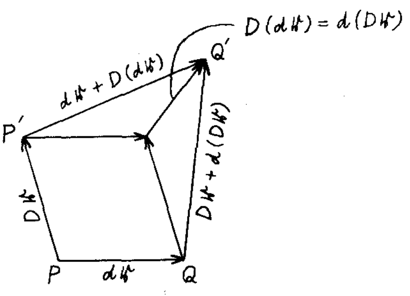
東北大学　正員　　佐武正雄

<u>1. 要旨</u>　有限変形理論は Murnaghan,[1) ]吉村慶丸博士[2)]などによつて研究されているが,いまだ不明な点が多い. こゝでは有限変形理論が微小変形理論と異なる二,三の点について考察を加え,その特色や問題点などについて述べる.

<u>2. 二つの歪テンソル</u>

有限変形理論においては2種類の歪の表現——弾性歪と塑性歪(歪増分を変形過程について積分したもの)——を考えることができる. これらの名称はそれぞれ主として弾性変形,塑性変形に用いられるという意味で,一般に変形の解析に当つては両者を同時に考察することも可能であつて,その相互関係を明らかにしておく必要がある

まず,点 $P_0$ が変形后点 $P$ に移つたとし,その位置ベクトルを $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}$ とすれば, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{u}$ ------(1)
こゝに, $\mathfrak{u}$ は変位ベクトルで数個の変形のパラメーター(弾性変形では一般に1個)を含む. このパラメーターに関する微分を位置に関する微分 $d$ と区別して $D$ と記すことにすれば (1) より　$D\mathfrak{r} = D\mathfrak{u}$ ------(2)
右図を参考にすれば,微小線素 $d\mathfrak{r}$ の変化は




$$D(d\mathfrak{r}) = d(D\mathfrak{r}) = d(D\mathfrak{u}) = d\mathfrak{r}\cdot\nabla(D\mathfrak{u}) \quad \text{------} (3)$$

こゝに,微分演算子 $\nabla$ は変形過程の各瞬間位置 $P$ における微分であつて,初期位置 $P_0$ におけるものではない. (特に $P_0$ について考えるときは $d_0$, $\nabla_0$ などと記す) いま,(3)の右辺の量を $(D\Phi) = \nabla(D\mathfrak{u})$ ----- (4) と記し無限小変形と呼ぶことにする. $(D\Phi)$ は一般に非対称のテンソルで変形のパラメーターについて全微分になつているとは限らない. この意味で括弧を付して記すのである. 特に $(D\Phi)$ が積分可能な場合は $D\Phi$ と記し,その積分 $\Phi$ (変形テンソル)が求められる. 更に, $\Phi$ と $D\Phi$ とが内積について可換であれば $\exp\Phi$ を定義し, $d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_0\cdot\exp\Phi$ ------(5) と記すことができる. 何となれば

$$D(d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{r}_0\cdot D(\exp\Phi) = d\mathfrak{r}_0\cdot\exp\Phi\cdot D\Phi = d\mathfrak{r}\cdot D\Phi$$

となるからである. 歪増分 $(D\tilde{\varepsilon})$ は微小線素の長さの変化を用い, $d\mathfrak{r}'\cdot d\mathfrak{r}' - d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}\cdot 2(D\tilde{\varepsilon})\cdot d\mathfrak{r}$ ---- (6) で定義されている. こゝに, $d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + D(d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{r}\cdot\{I + (D\Phi)\} = \{I + {}^t(D\Phi)\}\cdot d\mathfrak{r}$ であるから,(6)式の左辺は $d\mathfrak{r}\cdot\{I + (D\Phi)\}\cdot\{I + {}^t(D\Phi)\}\cdot d\mathfrak{r} - d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}\cdot\{(D\Phi) + {}^t(D\Phi)\}\cdot d\mathfrak{r}$ となり, $(D\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\{(D\Phi) + {}^t(D\Phi)\}$ ------(7) を得る. ( $I$ は単位テンソル, $t$ は転置テンソルを示す) $(D\tilde{\varepsilon})$ は一般に必ずしも積分可能ではないが $(D\Phi)$ が積分可能な場合は　その積分 $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\Phi + {}^t\Phi)$ ---- (8) が求められる. 一般には塑性歪として $\tilde{\varepsilon} = \int_{P_0}^{P}(D\tilde{\varepsilon})$ を用いるのであるが,これは積分経路によつて値が異なり,塑性変形の非可逆性をあらわす　一方,

弾性歪 $\varepsilon$ は初期状態 $d\mathbf{r}_0$ を基準として $d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0\cdot d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_0\cdot 2\varepsilon\cdot d\mathbf{r}_0$ ------ (9) で定義される (1)式に微分演算 $\nabla_0$ をほどこせば $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0\cdot(I + \nabla_0 \mathbf{u})$ であるから

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_0 \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla_0 + \nabla_0 \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla_0) \quad \text{----------} (10)$$

を得る. また, (5)が成立し, $\Phi$ と ${}^t\Phi$ とが可換ならば,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2}(\exp\Phi\cdot\exp{}^t\Phi - I)\\ &= \frac{1}{2}\{\exp(\Phi + {}^t\Phi) - I\}\\ &= \frac{1}{2}(\exp 2\tilde{\varepsilon} - I) \quad \text{---------} (11)\end{aligned}$$

となる. これが弾性歪と塑性歪との関係で, 微小変形として高次の項を省略すれば当然 $\varepsilon \fallingdotseq \tilde{\varepsilon}$ である.

## 3. 弾性法則

有限弾性変形は主としてゴムのような高分子物質のエントロピー弾性によるものであるが数学的な取扱いはポテンシャル弾性の場合と同一である. 弾性法則は, 弾性エネルギー $W$ の形を与えればよい. $W$ は弾性歪 $\varepsilon$ の3ヶの スカラー不変量による歪成分の $n$ 次同次式 $W_n$ を用い $W = \sum W_n$ とかくことができる. $W_2$ までとれば線形弾性 (弾性係数 $\lambda, \mu$), $W_3$ までとると非線形弾性となり弾性係数 $l, m, n$ の3個が追加される. $W_4$ 以上必要に応じて項数を増加させることができるが弾性係数の数も増加することになる. これらの非線形弾性係数と $\lambda, \mu$ はすべて独立なものか相互に関係あるものかは明らかでない.

次に実際に変形を求めようとする場合, 与えられた応力から弾性法則によって直ちに歪, 変形を求めることはできない. 何故なら変形そのものが応力の作用する面の位置や方向を定めるからである. Murnaghan は次のような逐次近似法を行っている. 変形の仮定 (微小変形から推定、パラメーター $k$, 比例定数 $\alpha, \beta$ を含む) $\longrightarrow$ 弾性歪, 応力の算出 (この場合線形弾性法則, $k$ の2次以上を省略) $\longrightarrow$ 応力が与えられたものに合致するように, $k, \alpha, \beta$ を決定 $\longrightarrow$ 変形の修正 ($k$ の2次の項まで考え 比例定数 $\alpha', \beta', \gamma'$ を追加) $\longrightarrow$ 歪, 応力の算出 ($l, m, n$ が入る. $k$ の3次以上省略) $\longrightarrow$ 前と同様にして $\alpha', \beta', \gamma'$ を決定. この方法は単純な変形の場合はよいが, 複雑になると変形を仮定すること自体難しくなる. また, 応力は変形中の位置 歪は初期位置で定義されているので, 注意して換算を行わなければならない.

弾性法則として別に変形過程における歪増分 $D\tilde{\varepsilon}$ をとり $D\tilde{\varepsilon} = f(D\sigma, \sigma)$ -----(12) と与えることも一つの合理的方法と考える. ($D\tilde{\varepsilon}, \sigma$ は定義場が一致) $f(D\sigma, \sigma)$ と記したのは変形が進んだ状態ではその時の応力 $\sigma$ による異方性が生じていることを考慮しなければならないからである. 初期応力 $\sigma$ をもった弾性体の異方性弾性法則が明らかになれば (12)式を積分して $\tilde{\varepsilon} - \sigma$ 関係を求めることも可能となると思う. この場合, (11)式の $\varepsilon - \tilde{\varepsilon}$ 関係から $\sigma - \varepsilon$ 関係を求めることができ, 非線形弾性係数 $l, m, n$ 等の性質も明らかになることゝ思われる

参考文献


1) F D Murnaghan, Finite Deformation of an Elastic Solid (J. Wiley, 1951)

2) [illegible], 塑性力学 (共立.応用力学講座, 昭32) 連続体の力学, 特に有限変形理論, の根本問題 (日本機械学会論文集 (1) 25巻 151号, 昭34) 非線形, 有限変形弾性理論 (日本機械学会論文集 (1) 26巻 167号, 昭35)