

I-1 還元法による構造解析

日本設計測量 KK 佐々木道夫
〇 高尾 孝 =

不静定構造物の解法には仮想仕事法、Cross のモーメント分配法、G. Kani の方法などいろいろの方法がありなく構造物の設計計算に用いられている。還元法 (Reduktionsverfahren) というのは、曲げ、ねじり、伸縮に関する微分方程式の一般解を基礎として出発したもので従来の方法に比べ特に新しいものではないが、計算の過程に行列を導入し、計算の系統化をはかったものであり高次不静定構造物、特に多径間の連続バリエーションなどに応用して便利であり、また構造物がねじりと受けるものであっても、ほぼ同様な形で計算を進めることができ構造物の設計計算には有力な一つの方法であるからここに紹介することにする。

任意に支持された連続バリ

任意に支持された連続バリの支間 $i-k$ に着目する。 $i-k$ 間ではバリの曲げコワサ $EI_k = \text{const}$ として $EI_k w_k'''' = q_k(x_k)$ が成立つからこれを積分して行列表示すれば

$$\begin{bmatrix} w_k(l_k) \\ y_k(l_k) \\ M_k(l_k) \\ Q_k(l_k) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_k & \frac{l_k^2}{2EI_k} & \frac{l_k^3}{6EI_k} & w_{k0}(l_k) \\ 0 & 1 & -\frac{l_k}{EI_k} & -\frac{l_k^2}{2EI_k} & y_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 1 & l_k & M_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k(0) \\ y_k(0) \\ M_k(0) \\ Q_k(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{ただし} \quad Q_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k} q_k(\xi) d\xi \quad M_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k} Q_{k0}(\xi) d\xi \quad -y_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k} \frac{M_{k0}(\xi)}{EI_k} d\xi \quad w_{k0}(x_k) = -\int_0^{x_k} y_{k0}(\xi) d\xi$$

$$(0 \leq \xi \leq x_k \quad 0 \leq x_k \leq l_k)$$

(1) 式の柱行列を $y_k(l_k)$, $y_k(0)$ 又正方向行列を F_k とすれば $y_k(l_k) = F_k y_k(0)$

次に支束 k に着目し、支束のねじりおよび沈下に対する抵抗係数を K_k , R_k とすれば

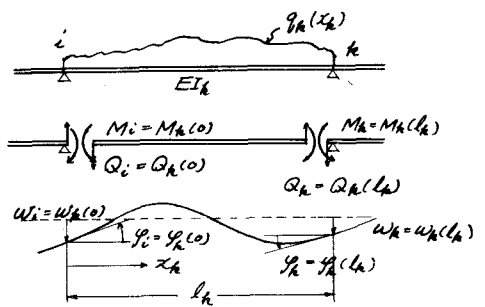
$$y_{k+1}(0) = A_k y_k(l_k) \quad \text{ただし} \quad A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_k^s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_k^s \\ 0 & -K_k & 1 & 0 & M_k^s \\ -R_k & 0 & 0 & 1 & Q_k^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

w_k^s , y_k^s などば支束に於ける飛躍量であり例えば y_k^s は通常のヒンジに於ける折れ曲りの角度である。

(1) および (2) 式から

$$y_{k+1}(0) = A_k F_k y_k(0) \quad (3)$$

が得られこれが連続バりに於ける還元法の基本式である。



多径間ラーメン

ラーメンの格点 \$k\$ の水平移動及 \$\psi\$ ハリの軸力は

$$u_k(l_k) = u_k(0) - \frac{l_k}{EF_k} N_k(0) + u_{k0}(l_k)$$

$$N_k(l_k) = N_k(0) + N_{k0}(l_k)$$

でありこの2つ要素 (\$u, N\$) を連続バリの場合に追加すればラーメンの基本式が得られる。

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}(0) \\ w_{k+1}(0) \\ y_{k+1}(0) \\ M_{k+1}(0) \\ Q_{k+1}(0) \\ N_{k+1}(0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_k^s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y_k^s \\ a & 0 & b & 1 & 0 & 0 & M_{k0} + M_k^s \\ 0 & -k_k & 0 & 0 & 1 & 0 & Q_{k0} + Q_k^s \\ c & 0 & d & 0 & 0 & 1 & N_{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_k/EF_k & u_{k0}(l_k) \\ 0 & 1 & -l_k & l_k^2/EI_k & l_k^3/6EI_k & 0 & w_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 1 & -l_k/EI_k & -l_k^2/2EI_k & 0 & y_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_k & 0 & M_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N_{k0}(l_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k(0) \\ w_k(0) \\ y_k(0) \\ M_k(0) \\ Q_k(0) \\ N_k(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

a, b, c, d は柱の高さ, 剛度, 支持条件から決まる係数である。

例題 3-スパン連続バリの曲げモーメント Inf-line

$$y_1^s(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^s(0) = -10 \\ M_1^s(0) = 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1^s(0)$$

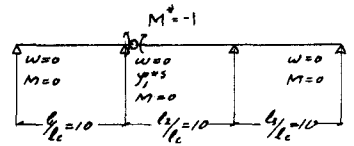
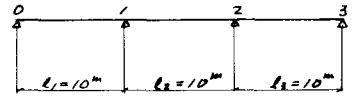
$$F_1^s = \begin{bmatrix} -2 & 30 & 0 \\ 0.1 & -2 & 0 \\ 1.9 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^s(\frac{l_c}{2}) = +20 \\ M_1^s(\frac{l_c}{2}) = -1 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1^s(\frac{l_c}{2})$$

$$A_1^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1^{ss} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 - y_1^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & y_1^s \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^s(0) = -17.5 \\ M_2^s(0) = 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_2^s(0)$$

$$F_2^s = \begin{bmatrix} -2 & 30 & -30 \\ 0.1 & -2 & 2 \\ 1.9 & -28 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2y_1^{ss} \\ -0.4 & 0.1y_1^{ss} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^s(\frac{l_c}{2}) = +5 \\ M_2^s(\frac{l_c}{2}) = +0.25 \\ 1 \end{bmatrix} = y_2^s(\frac{l_c}{2})$$

$$A_2^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2y_1^{ss} \\ -0.4 & 0.1y_1^{ss} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3^s(0) = +5 \\ M_3^s(0) = +0.25 \\ 1 \end{bmatrix} = y_3^s(0)$$

$$F_3^s = \begin{bmatrix} -2 & 30 & 0 \\ 0.1 & -2 & 0 \\ 1.9 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -26 & 7y_1^{ss} \\ 1.5 & -0.4y_1^{ss} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3^s(\frac{l_c}{2}) = -2.5 \\ M_3^s(\frac{l_c}{2}) = 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_3^s(\frac{l_c}{2})$$



$$\text{始末ベクトル } y_1^s(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_1^s(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_c = 1^+ \quad l_c = 1^m \quad EI_c = 6EI_k$$

境界条件

$$M_2^s(0) = 0 = 0.1 y_1^s(0) + 1$$

$$M_3^s(\frac{l_c}{2}) = 0 = 1.5 y_1^s(0) - 0.4 y_1^{ss}$$

$$\therefore y_1^s(0) = -10, \quad y_1^{ss} = -37.5$$

$$M_{inf} = -W^s(x)/y_1^{ss}$$

数値計算を行う場合には任意の基本量 \$l_c, I_c, P_c\$ とし $w = w^* P_c l_c^3 / EI_c$, $y = y^* P_c l_c^2 / EI_c$, $M = M^* P_c l_c$, $Q = Q^* P_c$ と正規化するのが便利である。剛支梁の場合には例題のように (w, Q) の要素は消去できる。