Ⅳ－40 図学的にみた球の性質と作図への利用

北海道大学理学部　　正員　　澤田詮亮

1. 定義と特性.　球はその直径の1つを軸とし，1つの円が回転することにより生成される複曲面であり，また中心点から1定距離にある空間のすべての点の軌跡であると定義される。球の直径に等しい円を描くだけで任意の投象図が得られ，そのどれもが球の外形線であることは，他の立体に見られない。球と平面との交線は，平面の位置に関係なく常に円をなし，平面が中心を通るとき大円と称し，その直径は球の直径に等しく，その他の平面による交線はこれより小さく小円という。直径を含む任意の2平面に挟まれた部分を三日月形，平行2平面間の部分を帯環という（図.1）。球面上AからBまでの最短距離（測地線）は，2点を含む大円上にあって小円上にない。この事実は地球上2点間の船や飛行機の航路の設計に重要なことになる。図.2はABの軸のまわりに大円の平面内に回転した小円を示し，A,Bを通る円は大円がより短距離を与え，小円でないことが明らかである。測地線は弦ABの実長ab_1を求め，球の外形線上適当の位置に移して実長の弦xyとし，その弧長をとり，これを直延してyy_1とすれば，展開図を描かなくて求まる（図.3）。大円，小円の投象の1方が円のとき，他の投象が基線に平行するその直径の線であることは，重要な性質である。

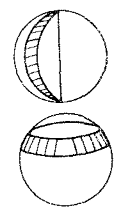

図. 1

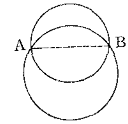

図. 2

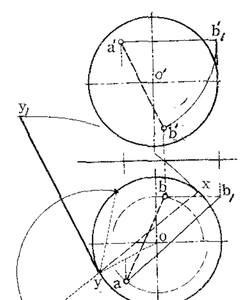

図. 3

2. 球上の点，直線の貫入点，展開，接平面の作図。

球面上の点は，常に与点を含み実形を表わすような1つの円で交わる切断補助平面を設けるならば，その円上に求まる。図.4は点1,3の立面図が球面上に与えられ，その平面図を求め，点2の平面図が与えられ，その立面図を求めたものである。補助平面Iにより見える実大の円上見える点1'-1として得られ，平面図の大円上の点2は，立面図では基線に平行な直径上2'で表われる。点3の平面図は補助平面Ⅲにより得られ，その直径CDの小円は平面図では見えないから，3'-3点は隠れた点である。

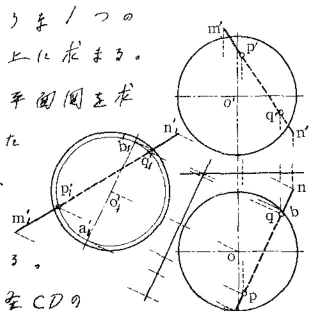

図. 5

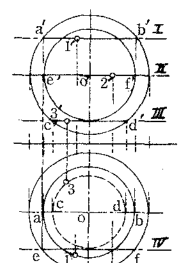

図. 4

図.5で直線MNが球に貫入する点P,Qは，MNを含む平面で切断したとき，球から切り出される円周上にある。1般に図のように副図によりその直線を含む切断平面の実形図を描いて求まる。球の接平面は，面上の与点に引いた半径に垂直である。図.6で半径OPに水平線ABを描けば，求める接平面を表わす1線となり，同様にOPに垂直な正面図で実長を示す線CDを描けば，交差2直線AB,CDは接平面を決定する。ABとCDはそれぞれ球の小円に接線であり，よって両線が球に共に接線である

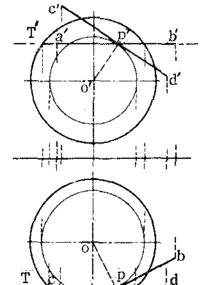

図. 6

ことを証する。　球は展開不可能であり，近似的に展開するよりほかない。それには(1) 軸を含む平面で任意の数に等分し，分割部分の小円や大円の弧を直線に考え，全体を柱面の集合体とみて，各分割部を展開するか，(2) 小円間の経線を直線と考え，切頭円錐の集合体とみて帯状に展開する。図.7 の a, b はそれぞれその近似展開図である。

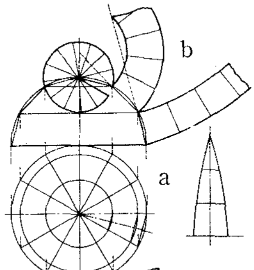

図. 7

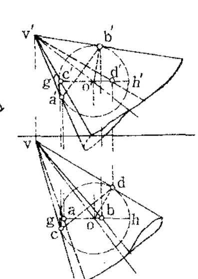

図. 8

3. 円錐曲線の内接球としての作用.　球は円錐曲線の内接球として多方面に利用される。a. 底不定の円錐，円柱の作図. 錐面のうち，球を包絡するものが円錐であり，その頂点が無限遠にあるとき円柱と考えられる。一般に[illegible]不定の円錐，円柱を描くとき，内接球の包絡を利用する。円錐[illegible]球の半径と頂点から中心までの距離，円柱では内接球の半径が与えられるならば，大きさと形が定まり，円錐は頂点から，円柱は軸に平行に球に接線を描けばよい。　図.8で底不定の円錐の正面図外形面素 $v'a'$, $v'b'$ の平面図は，正面図内接球大円の端形 gh 上に，球との接点 a', b' の平面図 a, b を定めて va, vb とし，また平面図外形面素 vc, vd の正面図は，平面図内接球大円の端形 $g'h'$ 上に球との接点 c, d の正面図 c', d' をとり，$v'c'$, $v'd'$ とする。　b. 円錐，円柱上の点の設定. 図.9 で軸が直立投象面に平行な円錐上の点 P の正面図 p' を知り平面図を定めるには，p' を通り軸に垂直な直線 $a'b'$ を描き，これを内接球と円錐との接触円と考え，内接球 O を描く。p' を通る水平面でこの球を切断すれば，その切口の上に P があるから，平面図に切口の実形を示す小円上 p, p_1 を定める。　図.10で軸が両投象面に傾く底不定の円柱上の点 P の平[illegible]，正面図を定めるには，p を通る面素を含む平面で切断すれば，内接球も切られ，その切口円に接する面素上に P があるから，その実形図を示す副図を作り，得られた面素上の P の高さを正面図へ移す。　c. 円錐，円柱の切断面の作図.　円錐を任意の平面で切断するとき，頂点を通る平面のほかは切口が円錐曲線となる。たとえば円錐の底角より小さい傾きの平面による切口は楕円であり，これを描くため切口の平面に接する内接球を作れば，切口面と接する点は，楕円の1つの焦点となる（証明略）。図.11は軸が傾く円柱を水平切断する場合で，直ちに長軸は見えないが内接球 O_1 を描いて焦点が求まり，また短軸も求まるから，$cf = c_0a = c_0b$ にとって長軸 ab が定まる。g', h' の平面図は，球の大円 O' の接点 m', n' の平面図 m, n を大円の端形上に定め，m を通る面素上 g，n を通る面素上 h を設けて G と H の平面図が求まる。M と G，N と H は同一面素上にあり，求めた楕円に g' と h' から下

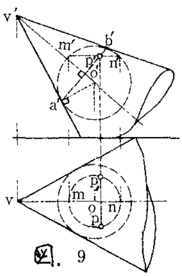

図. 9

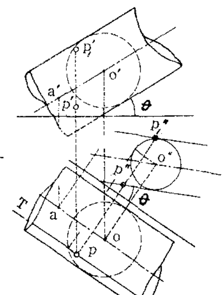

図. 10

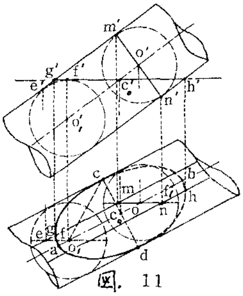

図. 11

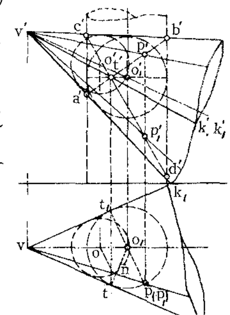

図. 12

した対応線の接点である。 d. 共通内接球としての利用. 軸が直立投象面に平行する底不定の円錐上のP点の平面図を知り，正面図を定めるには，図.10の方法を適用して求まるが，別法として図.12で与点Pの平面図pを通る内接球を作る（no//po₁として この球の中心O₁を定める）。この内接球の正面図O'₁を包絡する直円柱を作れば，O₁は両者の共通内接球となる。「軸交差し共通内接球を包絡する円錐と円錐，円柱と円柱，円錐と円柱の相貫線は2楕円であり，両曲面の軸を含む平面に平行な平面上に投象すれば，楕円の端形図で表われる。ただし楕円を端形図で表わすため，両軸は正面図に実長を表わすことを要件とする」(定理)。このことから平面図の円O₁は球の大円，直円柱の外形線，両楕円の3者を兼ねるものとなる。よってこの楕円上のPとして正面図p'₁p'₂が求まる。底不定の円錐の面素を描くことにも適用され，面素の平面図vpの正面図は，相貫線上の点p'₁p'₂を通るv'p'₁，v'p'₂である。もしPの平面図pがtの位置にあれば，平面図外形面素の球との接点となり，正面図でp'₁p'₂がt'に重なった場合となり，球の水平大円上の位置にある。よって平面図の外形面素VK，VK₁の正面図は，V'T'K'，V'T'₁K'₁である。 e. 円錐状トランジション. 円錐状トランジションは展開可能で，三角形法による近似展開のねじれ円錐より工作便で値段も安い。2円柱を接続する直円錐トランジションは，図.13のように共通内接球を包絡する2円錐として接ぎ手を描くことができる(上記定理)。e図はY-形分岐換気管，f図は斜円錐のトランジションで，平行しない円と円を連ねるトランジションに有利で，2円柱の軸が交わるとき，その中心線の角度や直径に関係なく用いられる。中心線の交点Eに中心を持つ球を利用し，両中心線上に円ABとCDを設定することが必要で，球の大きさは両方の円がEからどれだけ遠ざからねばならないかによりきまる。 f. 2円錐の共通接平面. 2つの円錐に接する共通接平面を設け得る条件は，1. 2円錐が共通内接球を持つとき，両円錐と球との接触円の交点を通る平面，2. 2円錐が頂点共有のとき，3. 2円錐が軸平行し，相似のとき頂点を結ぶ直線を含む平面 である。これら3つの間に球の利用により，条件を交換しても同じ接平面が形成される(図.14参照)。図.15は，与点Aを通り水平投象面に60°，直立投象面に50°の斜平面を跡線で求めたもので，Aを頂点とし底角が水平，直立の各投象面に60°と50°の円錐を作り，その共通接平面が求めるものであり，これを描くには水平円錐に内接球Oを作り，この円錐の代りにその球を包絡して直円錐と相似の頂点Cの直円錐を描き，AとCを頂点とする2直円錐の共通接平面を作る。 4. 軸交差の回転面の相貫線. 軸が交わる2つの回転面の交線

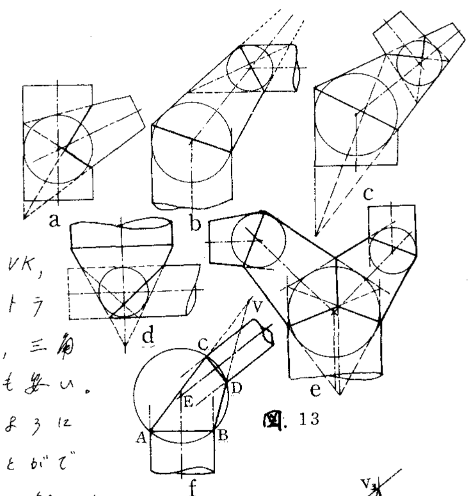

図. 13

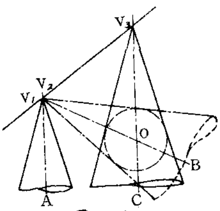

図. 14

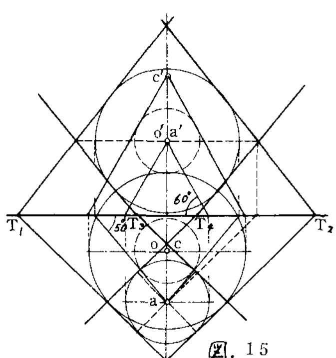

図. 15

を求めるとき，実長を示す両軸の交点を中心とする両曲面と交わる球を切断補助平面に利用する。図.16は直立投象面に平行な軸の円錐の交線の例である。正面図で球による両切口円が端形で得られ，それらの交点1',2',3'は平面図の直円錐の切口円上に対応相貫線上の点となる。両軸を固定し両円錐を相似的に拡大すると考え，外形線外の点もとる。両軸を含む直立補助面で切断して限界点A,B,C,Dが求まる。これらの点を連ねた正面図は双曲線となる。その漸近線は直立円錐に内接する球を包絡し，横臥円錐と相似の頂点V_2'の円錐を作れば，両母線c'b', a'd'で交わり，漸近線の方向を与える。任意の補助平面3'-3'で双曲線を切り，曲線間の3'-3'の各中点1', j'を結ぶ線が両曲線に挟まれる1'-1'の中点Mを通り，c'b', a'd'に平行な線が漸近線である。交線の平面図のVisibilityの限界点は，横臥円錐の外形面素V_1K, V_1K_1の球との接点t, t_1の正面図を，球の正面図である大円の端形上に定めれば，$V_1't'K'$, $V_1't_1'K_1'$が平面図外形面素の正面図であり，交線との交点r', s'の平面図rとr_1, SとS_1として求まる。

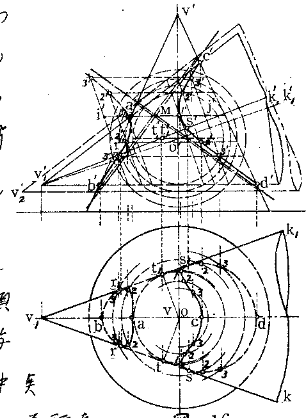

図. 16

5. 回転体の陰線の設定．回転面の緯円が光線柱面との接点を連らねる曲線が陰線となる。回転面の多数の緯円で内接するような球を作り，球の陰線（球の光線柱面との接触大円）と，球の回転面との接触円（緯円）との交点をもって陰線上の点とする。内接球の陰線は一般に楕円になるから1々描かず，これを内接球とその中心を通り光線に垂直な平面との切口であると考え，この光線に垂直な平面と緯円との交線が緯円と交わる点を陰線上の点とする。図.17の円弧回転体で，光線の副正面図r"に平行に正面図外形線に接線を描けば，接点1_0は陰線の最高点で，これを原光線方向に移し1'-1点となる。外形線の正面図，平面図にそれぞれ光線に平行に接線を引き，接点2', 3, 3を陰線のVisibilityの限界点とする。一般の点として補助平面T'による緯円ABで内接する球を作り，正面図O_1'を通り光線の正面図r'に垂直，直立投象面に平行なc'd'-cd（陰線である大円の直径）を描く。直線CDと補助平面T'との交点をNとし，平面図でnを通り光線の平面図rに垂直な水平線4-4を描けば，球の陰線CDと接触緯円ABの交線となり，この上の4, 4は陰線上の点である。緯円の位置を変え，同じ作図で他の点を得る。

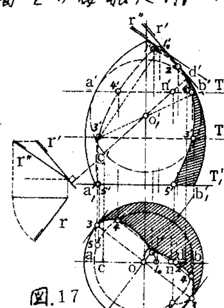

図.17

6. 回転面の作図．回転面の外形は多くの緯円の副図を包絡する曲線として表わせば，緯円の副図が楕円となり厄介なので，軸上に中心を持つ内接球の副図を作れば簡単に作図できる。図.18 a.は円環の中心線の副図（楕円）上に中心を持つ同径の球の副図を包絡して外形線とし，b.はcrank handleの副図で，軸は縮小するが，軸上に中心を持つ正面図と同径の球の副図の包絡曲線が外形線となる。c.はつるまき線上に中心のある同径の球の包絡曲線で外形を表わしたバネ（複曲面）である。

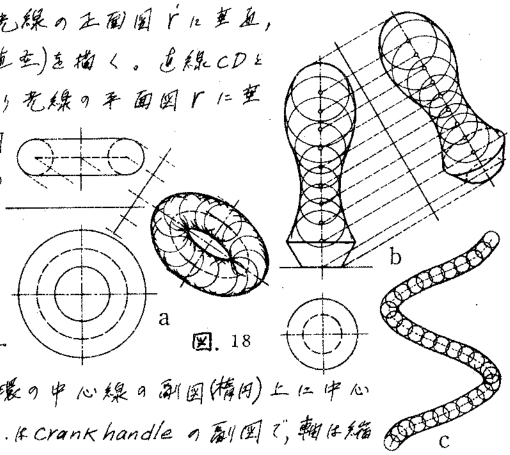

図. 18