

III-29 弾床梁(有限長さ)解法の基本式とその応用例

日本道路公団 高速道路大阪建設局 正会員 佐藤 昭

§1 序論

こゝで 弾床梁とは 連続した弾性支承で拘束される直線梁を指す。

一般に弾床梁の計算では 梁長を無限とある仮定が多いが、始めから無限の仮定を用いれば 設計において必要な梁長を算出するのに不合理があり、又 短い梁を計算する場合 適用の限界について疑問ができる。そこで検討したところ 適当な係数の表さえ完成すれば 梁長を^(無限)仮定しなくとも 手数に費りなく計算できることが分つた。4つとも 実際に計算した結果では、梁長が或る程度に達すると 梁長を実際のものをを用いても、無限と仮定しても殆んど差がなくなる。これは 従来行われてきた方法が 大局的には正しいことを示している。しかしこのために 作らば表の範囲が狭くなったので、作製の手数がなすかつたと云える。以下 その計算に用いた最も基本的な式の一部と、2, 3の応用例を 極く簡単に紹介したいと思う。

§2 梁の各点に関する式

周知のように 弾床梁の形を示す微分方程式とその一般解は 次の通りである。

$$-EI \frac{d^4 y}{dx^4} = K \cdot y \cdot d \quad (2-1)$$

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (2-2)$$

(2-2)は 積分常数4つを含むので 常数の値を決めるには 矛盾重複のない 4つの境界条件があればよい。この条件を図2-1により 次のように決める。 $M_{x=0} = M_0$ $Q_{x=0} = Q_0$ $M_{x=l} = 0$ $Q_{x=l} = 0$

このように 条件を決めれば、梁の中の任意の真xにおける 変位、回転角、曲げモーメント、剪断力の値は A, B, C, Dの値と位置による函数で表わされ、次のような形に整理すると

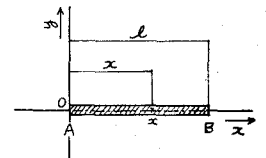


図 2-1

$$y_x = \frac{1}{2EI\beta^2} \left\{ M_0 \cdot \bar{y}_y(M_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot \bar{y}_y(Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) \right\} \quad (2-3)$$

$$\theta_x = \frac{1}{2EI\beta} \left\{ M_0 \cdot \bar{\theta}_0(M_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot \bar{\theta}_0(Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) \right\} \quad (2-4)$$

$$M_x = M_0 \cdot \bar{M}_M(M_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot \bar{M}_M(Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) \quad (2-5)$$

$$Q_x = \beta M_0 \cdot \bar{Q}_Q(M_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) + Q_0 \cdot \bar{Q}_Q(Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta x) \quad (2-6)$$

$\bar{y}_y(M_0 \cdot \alpha \cdot \beta x)$, $\bar{Q}_Q(Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta x)$ は $\beta l (= \alpha)$ と βx のみで決る。実用的な範囲で 適当な間隔の α , βx 毎に これらの係数の値を計算して表に作っておけば (2-3) ~ (2-6) の計算は 極めて容易である。(2-3) ~ (2-6) によつて 梁端の曲げモーメントおよび剪断力さえわかれば、梁の任意の真の 上記各値は容易に求まるわけである。上記の係数を総稱して 係数 $\bar{y}$ とする。係数 $\bar{y}$ は§4で説明する $\bar{y}_M(M_0 \cdot \beta x)$ $\bar{y}_Q(Q_0 \cdot \beta x)$ を含む4つとある。

§ 3 梁端に関する式

(2-3), (2-4)で $\beta x = 0$ とおくと

$$y_0 = \frac{1}{2EI\beta^2} \left\{ M_0 \mu_y(M_0, \alpha) + \frac{Q_0}{\beta} \mu_y(Q_0, \alpha) \right\} \quad (3-1)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2EI\beta} \left\{ M_0 \mu_\theta(M_0, \alpha) + \frac{Q_0}{\beta} \mu_\theta(Q_0, \alpha) \right\} \quad (3-2)$$

(3-1), (3-2)より Q_0 または M_0 を消去すると

$$M_0 = 2EI\beta^2 \left\{ y_0 \mu_M(y_0, \alpha) + \frac{\theta_0}{\beta} \mu_M(\theta_0, \alpha) \right\} \quad (3-3)$$

$$Q_0 = 2EI\beta^3 \left\{ y_0 \mu_Q(y_0, \alpha) + \frac{\theta_0}{\beta} \mu_Q(\theta_0, \alpha) \right\} \quad (3-4)$$

$\mu_y(M_0, \alpha), \dots, \mu_Q(Q_0, \alpha)$ を総稱して係数 μ とすると、係数 μ は係数 μ の $\beta x = 0$ とした値で α のみで決まる。

(3-1) ~ (3-4) で、梁端においては y_0, θ_0, M_0, Q_0 のうち いづれか二つが決まれば他は自動的に決ることがわかる。(3-1) ~ (3-4) は 梁端にかけた各値の転換、弾床梁と他の弾床梁又は普通の梁とを連結した際 接点の釣合を求めるのに用いられる。

§ 4 無限長さの弾床梁

序論で觸れたが、梁長を無限とする仮定は 実用上 大きな価値がある。梁長 $l = \infty$, 従って $\alpha = \infty$ としたとき 係数 μ の値は次の通りである。

$$\begin{aligned} \Phi_M(M_0, \beta x) &= e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x), & \Phi_M(Q_0, \beta x) &= e^{-\beta x} \sin \beta x, & \Phi_Q(M_0, \beta x) &= -2e^{-\beta x} (\sin \beta x), \\ \Phi_Q(Q_0, \beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), & \Phi_y(M_0, \beta x) &= e^{-\beta x} (-\cos \beta x + \sin \beta x), \\ \Phi_y(Q_0, \beta x) &= -e^{-\beta x} \cos \beta x, & \Phi_\theta(M_0, \beta x) &= 2e^{-\beta x} \cos \beta x, & \Phi_\theta(Q_0, \beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \end{aligned}$$

従って この条件のとき (3-1) ~ (3-4) は 次のようになる。

$$y_0 = \frac{1}{2EI\beta^2} \left\{ -M_0 - \frac{Q_0}{\beta} \right\} \quad (4-1)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2EI\beta} \left\{ 2M_0 + \frac{Q_0}{\beta} \right\} \quad (4-2)$$

$$M_0 = 2EI\beta^2 \left\{ y_0 + \frac{\theta_0}{\beta} \right\} \quad (4-3)$$

$$Q_0 = 2EI\beta^3 \left\{ -2y_0 - \frac{\theta_0}{\beta} \right\} \quad (4-4)$$

§ 5 応用例

(1), (2)は それぞれ 対応する図のような条件で 上記各式より導いたものである。

$$(1) \dots \Phi_1 = \Phi_Q(Q_0, \beta x_1) \cdot \Phi_M(M_0, \alpha, \beta x_1) - \Phi_Q(M_0, \beta x_1) \cdot \Phi_M(Q_0, \alpha, \beta x_1)$$

$$\Phi_2 = \Phi_Q(Q_0, \beta x_2) \cdot \Phi_M(M_0, \alpha, \beta x_2) - \Phi_Q(M_0, \beta x_2) \cdot \Phi_M(Q_0, \alpha, \beta x_2)$$

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \left\{ 1 - (\Phi_1 + \Phi_2) \right\}$$

$$(2) \dots f = -\frac{\beta^2}{M} \cdot \frac{\sum X_i^2}{N} \cdot \frac{1}{\mu_2} \quad F = N \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_3}{\mu_1} + f \right\}$$

$$m_0 = -\frac{1}{F} \left\{ \frac{\mu_3}{\mu_1} \cdot \frac{H}{\beta} \cdot f + \left(\frac{\mu_4}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_1} \right) M \right\}$$

$$p_{yi} = -\frac{P}{N} + (M + N \cdot m_0) \cdot \frac{X_i}{\sum X_i^2}$$

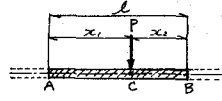


図 5-1

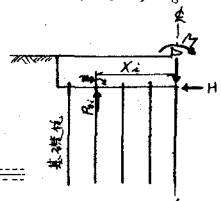


図 5-2

こゝに m : 枕頭における横縦方向反力係数比 $= \frac{E_H}{E_V}$, $E_H = \frac{\sigma_H}{\rho}$, $E_V = \frac{\sigma_V}{\rho}$

N : 枕の本数 X_i : 枕頭の位置

$$\mu_1 = \mu_Q(M_0, \alpha), \quad \mu_2 = \mu_Q(Q_0, \alpha)$$

$$\mu_3 = -\mu_M(M_0, \alpha), \quad \mu_4 = -\mu_M(Q_0, \alpha)$$

m_0 : 枕頭の曲げモーメント p_{yi} : 鉛直反力

以上