

II - 99 連立二次方程式による管網計算法

広島大学工学部 正員 青木康夫

上水道の配水管網の管網計算法としては Hardy Cross 法¹⁾が用いられているが、一般に多数回の繰返し計算を要する。これに対して著者は連立一次方程式による管網計算法²⁾を求めたが、修正流量の計算式に多少の誤差を有するので、2,3回の繰返し計算を必要とする。本文は更に計算式の精度を高め、損失水頭の変化量を修正流量に関する二次式で与えることにより、ほとんど1回の計算で正確な流量を算出する管網計算法を求めたものである。

管網計算法の理論：図-1に示すように、配水管網内の考える開管路を a とし、これに隣接する開管路 k との共通管路 a_k の仮定流量 Q_{ak} 、損失水頭 h_{ak} は、修正流量 ΔQ_{ak} を考慮することにより、損失水頭に Δh_{ak} の変化を生じ、損失水頭の閉合条件は満足されるものとする。ここで Δh_{ak} は次のように修正流量に関する二次式で与えることにする。

$$\Delta h_{ak} = 1.85 K_{ak} \Delta Q_{ak} + 0.786 K'_{ak} \Delta Q_{ak}^2 \quad \text{--- (1)}$$

Hardy Cross 法および連立一次方程式による解法では、次のように一次式で与えている。

$$\Delta h_{ak} = 1.85 K_{ak} \Delta Q_{ak} \quad \text{--- (2)}$$

図-2に示すように、(1)式のほうが(2)式よりも精度がよいことがわかる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} K_{ak} &= h_{ak}/Q_{ak} = r_{ak} Q_{ak}^{0.85} \\ K'_{ak} &= K_{ak}/Q_{ak} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

で、 r_{ak} の値は流向の如何にかかわらず常に正の値となるが、 r' の値は流向の正負によりその値も正負に変わるものである。

次に、管路 a_k の修正流量 ΔQ_{ak} は開管路 a, k の修正流量 X_a, X_k により次式で与えられる。

$$\Delta Q_{ak} = X_a - X_k \quad \text{--- (4)}$$

Hardy Cross法では ΔQ_{ak} は X_a のみを考慮していることに注意を要する。

故に、管路 a_k の修正された損失水頭 $\bar{h}_{ak}$ は、(1)式と(4)式より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ak} &= h_{ak} + \Delta h_{ak} \\ &= h_{ak} + 1.85 K_{ak} (X_a - X_k) + 0.786 K'_{ak} (X_a - X_k)^2 \quad \text{--- (5)} \end{aligned}$$

いま、考える開管路 a が $b, c, \dots, n$ 開管路に隣接しているものとするれば、損失水頭の閉合条件より次式が成立する。

$$\sum_{k=b}^n \{ h_{ak} + 1.85 K_{ak} (X_a - X_k) + 0.786 K'_{ak} (X_a - X_k)^2 \} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

従つて、配水管網内の各開管路について(6)式を作成し、各開管

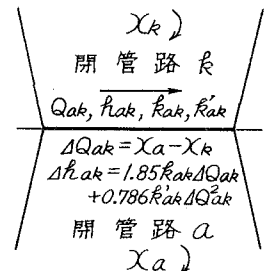


図-1

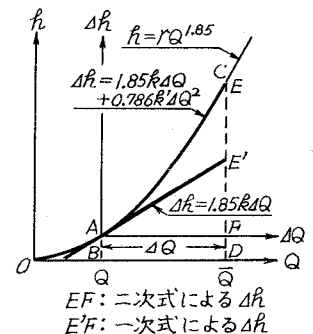


図-2

路の修正流量を未知数とする連立二次方程式を解いて仮定流量の修正計算を行えば、1回の管網計算で正確な流量および損失水頭を算出することができる。ただし、仮定流量の流向を逆方向に仮定した場合は、連立一次方程式による解法で正しい流向に直してから本解法を適用しなければならない。

連立一次方程式による解法および Hardy Cross 法における(6)式に相当する計算式を示せば次のようである。

$$\text{連立一次方程式による解法} \quad \sum_{k=b}^a \{h_{ak} + 1.85 k_{ak} (X_a - X_k)\} = 0 \quad \text{--- (7)}$$

$$\text{Hardy Cross 法} \quad \sum_{k=b}^a \{h_{ak} + 1.85 k_{ak} X_a\} = 0 \quad \text{--- (8)}$$

(7) は修正流量に関する連立一次方程式になり、(8) 式は修正流量を独立の式で求めることと示しているが、計算式の精度は順次低下し、繰返し計算の回数も多くなるものである。

連立二次方程式の解法：(6) 式は修正流量に関する連立二次方程式となるが、これを解くには直接法による解法はなく、間接法によつて解かなければならない。間接法には図解法、内挿法、反復近似計算法および Newton-Raphson 法があるが、未知数が多くなると図解法および内挿法は解法困難である。従つて実用的には反復近似計算法および Newton-Raphson 法が用いられる。しかし両解法とも第一近似値の与え方が解法の難易を左右するが、現在のところ理論的な方法はなく、暗探法によるほかはないようで、これが連立二次方程式の解法を困難にしている。著者は両解法について研究を行つた結果、管網計算の場合には次の方法によつて連立二次方程式の解法を求めることができた。

すなわち、連立二次方程式の二次および乗積の項の係数は一次の項の係数に比較して小さいということに着目して、次の方法を考案した。

1. 反復近似計算法：二次および乗積の項を既知数として右辺の常数項に移項し、原方程式を連立一次方程式の形に変形し、繰返し計算により原方程式の解を求める。繰返し計算の回数は 4～5 回で終了する。
2. Newton-Raphson 法：原方程式の二次および乗積の項を省略した連立一次方程式の解を第一近似値に採用し、第一近似値の補正值に関する連立一次方程式を作成して補正計算を進めれば、急速に収斂して約 2 回の繰返し計算で原方程式の解を求めることができる。

本解法は Hardy Cross 法および連立一次方程式の解法に比較して計算は多少面倒になるが、計算式の精度がよいため、ほとんど 1 回の管網計算で正確な流量が求められ、高度の計算器械の利用と共に、配水管網の設計計算に役立つものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 土木学会；水理公式集，p. 168，昭. 32. 8.
- 2) 青木康夫；管網計算の連立一次方程式による新解法，水道協会雑誌，第 295 号，昭. 34. 4.