Ⅱ－34　掃流力の再確認

日本大学理工学部　正員　栗津清蔵

1．まえがき　水路の潤辺に相当する面に作用するセン断応力を一般に掃流力(τ)とよんでいる。距離dx区間の水に等流の条件を適用すると，周知のように等流の掃流力の式が得られる

$$\tau_0 = wR_0 i \tag{1}$$

しかし，a)その流れが層流，乱流のように水粒子の運動機構が本質的に違う場合，(1)式にその本質の相違がどのように折り込まれているか？，b)不等流の場合iの代りに摩擦コウ配をもつて掃流力を示しているが，どのような考えで誘導されているのか？，これらの問題に回答を与えるには掃流力の表現について再確認する必要がある。

筆者は掃流力の表現について，在来の考え方にとらわれることなく，掃流力の定義から出発して，その表現の明確化を試み，土砂の掃流，滞積，洗掘の問題を論ずる場合の基礎外力となる掃流力について，一様断面開水路を例に取って系統的に論ずる。

2．等流下の掃流力

掃流力の表現には大別すると，a)等流の条件式，b)抵抗法則の二つの方向から誘導される，a)によると(1)式が得られる，b)については以下述べる。

一般に潤辺に相当する面のセン断応力は

$$\tau_0 = f\frac{\rho v^2}{2}\ ,\ f = 2/\left(\frac{v}{v_*}\right)^2 \tag{2}$$

従ってfの性質を知ることによって，掃流力の性質が知られる，例えば廣長方形開水路を例にとると

I) 層流の場合

$$f = 6/R_e\ ,\ R_e = vR/\nu \tag{3}$$

II) 乱流の場合

混合距離 $l = \kappa z\sqrt{1-(z/h)}$ と仮定[1]，層流底層の厚さδ，壁面の凹凸の平均値をεとする

i) ε＜δ

流速分布が円形管路と相似であると仮定，さらにNikuradseの実験[2]と対比し，δ/h以上の項を無視すると

$$f = 2/\left(C_1 - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\log_e\frac{v_* R}{\nu}\right)^2$$

$$= 2/\left(3.0 + 5.75\log_{10}\frac{v_* R}{\nu}\right)^2 \tag{4}$$

なお岩垣の研究[3]によると$C_1 = f(F_r)$である。

ii) ε＞δ

$$f = 2/\left(C_2 - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\log_e\frac{R}{\varepsilon}\right)^2,\ C_2 = v_*\varepsilon/\nu \tag{5}$$

なお平均径d_mの移動床についての筆者の研究[4]によると

$$f = 2/\left(5.94 + 5.75\log_{10}\frac{R}{d_m}\right)^2,\ 0.3 \leq F_r \leq 0.9 \tag{6}$$

またChézyの係数と関係ずけると

$$f = 2g/C^2 \tag{7}$$

のようにfは示されるから，(2)式に代入することによって掃流力が得られる，しかし定量的には(1)式と同一であるが，定性的問題が理解される。

3．不等流下の掃流力

等流の場合に二つの方向から表現したように，不等流の場合a)運動量方程式，b)抵抗法則の二つの方向から掃流力を考える。

I) 運動量方程式

水路床に沿ってx軸，その傾斜角をθ，(逆傾斜の場合θ＜0)とし，任意の$x = x_0$の断面の面積，潤辺，水深，水圧，平均流速をそれぞれA, P_w, h, P, vとし，$x_1 = x_0 - \frac{dx}{2}$，$x_2 = x_0 + \frac{dx}{2}$の二断面間の水に運動量方程式を適用，vはxの方向を向いていると仮定

すると，x方向の運動量方程式は

$$(P_1-P_2)\cos\theta-F_\tau+W\sin\theta=\beta\rho Q(v_2-v_1) \quad (8)$$

$P_1=P-\frac{dP}{dx}\frac{dx}{2}$, $P_2=P+\frac{dP}{dx}\frac{dx}{2}$, $W=wAdx$, $v_1=v-\frac{dv}{dx}\frac{dx}{2}$, $v_2=v+\frac{dv}{dx}\frac{dx}{2}$ とすると(8)式は

$$-\frac{dP}{dx}dx\cos\theta-F_\tau+wAdx\sin\theta=\beta\rho Q\frac{dv}{dx}dx \quad (9)$$

水圧は静圧分布をしていると仮定すると $P=w(h-\bar{z})A$，$\bar{z}$は流積の図心の水路床からの高さ(z)の値，断面形状が$y=f(z)$で示されると，$A=\int_0^h 2f(z)dz$, $dA/dh=2f(h)=T$, $\bar{z}=\int_0^h 2f(z)zdz/\int_0^h 2f(z)dz$, $d\bar{z}/dh=T(h-\bar{z})/A$, $dP/dx=w(\frac{dh}{dx}-\frac{d\bar{z}}{dh}\frac{dh}{dx})A+w(h-\bar{z})\frac{dA}{dh}\frac{dh}{dx}=wA\frac{dh}{dx}$, $\frac{dv}{dx}=-\frac{QT}{A^2}\frac{dh}{dx}$ これらを(9)式に代入，掃流力$\tau=F_\tau/P_w dx$を求めると

$$\tau=wR\left\{\sin\theta-(\cos\theta-\beta Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}\right\} \quad (10)$$

これは抵抗法則を全然考えの中に入れない掃流力の一般式で，θが小さい場合は

$$\tau=wR\left\{i-(1-\beta Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}\right\} \quad (11)$$

この式について，二三の検討を行なう，比エネルギ$E_s=h+\alpha\frac{v^2}{2g}$，$\frac{\partial E_s}{\partial h}=1-\alpha Q^2T/gA^3$，水深が限界水流の場合には$\frac{\partial E_s}{\partial h}=0$，次に$\alpha$，$\beta$は$u=v+\delta v$とおくと近似的に

$\alpha=1+3\eta$, $\beta=1+\eta$, $\eta=\int_{(A)}(\frac{\delta v}{v})^2\frac{dA}{A}$ によって示され，ηは10^{-2}の程度であるから実際には$\alpha\fallingdotseq\beta$とおけるから

$$\tau=wR\left\{i-(1-\alpha Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}\right\} \quad (12)$$

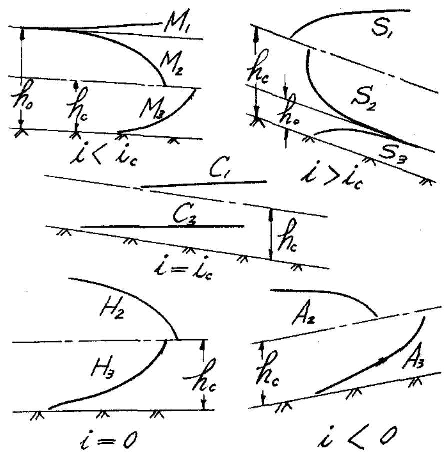
もし等流または$h=h_c$(限界水深)のときには$\tau=wRi$となる，しかし後者の場合一様断面開水路にあっては限界コウ配を$i_c=gP_{wc}/\alpha TC^2$とすると，$i_1<i_c$，$i_2>i_c$とすると$i_1\to i_2$に変る場合あるいは段落水路の場合に$h=h_c$の場合が存在する，しかしその断面で圧力が静圧分布をしているか否かに問題がある，次に(12)式の{ }の中の物理的意味を検討すると

$$\frac{d}{dx}\left(z_*+h+\alpha\frac{v^2}{2g}\right)=-\left\{i-(1-\alpha Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}\right\}$$

従って(12)式の{ }は有効水頭の流れの方向の変化率に負の符号をつけたもので，これはまたエネルギの考えから損失水頭の流れの方向の変化率に等しいことが理解され，従って常に次の条件が成立する

$$i-(1-\alpha Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}>0 \quad (13)$$

一般に一様断面開水路の水面形は下図のように示されるから，これをもとにして(13)式を吟味する。



No	A	B	C	条件	備考
1	+	+	+	ナシ	M_1, C_1
2	+	+	+	$A/B>C$	S_1 (jump以外)
3	+	+	−	ナシ	M_2
4	+	−	+	ナシ	M_3(jump以外), S_3, C_3
5	+	−	−	$\lvert C\rvert<A/\lvert B\rvert$	S_2
6	0	+	−	ナシ	H_2
7	0	−	+	ナシ	H_3 (jump以外)
8	−	+	−	$\lvert A\rvert/B<\lvert C\rvert$	A_2
9	−	−	+	$A/B<C$	A_3
記号：$A=i$, $B=1-\alpha Q^2T/gA^3$, $C=\frac{dh}{dx}$					

この表から見られるように(12)式の適用範囲が示されている，また(12)式を誘導する場合，断面の圧力分布は静圧分布をしていると仮定したから，上の条件外ではあるいはこの仮定が許されないかも知れない。

Ⅲ） 抵抗法則

1) 圧力分布は静圧分布，流速分布は等流の流速分布と相似な場合。

不等流の抵抗係数 f' を等流の抵抗係数と相似であるとして，一応 $f'=C_n\cdot f$ とおく，もし乱流で壁面が粗な場合は $f=2g/C^2$ であるから　$\tau=C_n f \rho v^2/2 = C_n wR(v^2/C^2R)$，一般に掃流力の理論式が得られるならば持殊な場合として等流の場合にも適用されるはずである，そのことに注目すると C_n は等流のとき 1.0 の値を取らなければならない，C_n については実験によって検討しなければならない（例えば $C_n=\{i-(1-\alpha Q^2T/gA^3)\frac{dh}{dx}\}\big/\frac{v^2}{C^2R}$），一応在来の掃流力の表示に従って $C_n=1.0$ とすると

$$\tau=f\frac{\rho v^2}{2}=f\frac{\rho Q^2}{2A^2} \tag{14}$$

f は(3)～(7)式によって示されている。

2) 圧力分布，流速分布が等流の場合と相似でない場合。

壁面近くの流速（底流速）を v_b とすると

$$\tau=f_b\rho v_b^2/2 \tag{15}$$

のように示され，抵抗係数 f_b は種々検討されなければならないが，その考え方としては，流れに平行におかれた板の抵抗係数と相似であるとか；等流の抵抗係数と，平均流速と底流速との関係式とから f_b を推定する考えがあると思う，例えば平均径 d_m の移動床の実験値より[5] $v_b/v_*=2.06/(v_*/\sqrt{gd_m})^{0.784}$ が得られる，これからも f_b は容易に求められる，いずれにせよ抵抗法則より掃流力を表示するには，種々の問題点があり今後の研究にまつものがある。

4. 掃流力の計算法

一般に私共の取扱っている流れは大部分乱流で壁面が粗な場合であるから，計算法の対象範囲を前述の場合に限定する。

等流の場合には等流水深を求め(1)式より求めるとよい。

不等流の場合には考える場所によって掃流力の大きさが違うから，掃流力を予測するにはその不等流が，どんな水面形に属するか，あるいは支配断面はどの位置にあるかを考えて水面形を追跡するか，または実測しておく必要がある，従って掃流力標価以前に不等流の水面形を追跡する必要がある，その方法としては支配断面が存在するならばそれを求め，その断面を出発点として在来の公式によって求める，例えば $i>0$ の場合；Bresse，Tolkmitt，物部，Chow の公式より，$i=0$ の場合；Chow の公式より，$i<0$ の場合；Matzek[6]，Chow[7] の公式を用いるとよいが，これらの公式に等流水深の導入は現象的に好ましいものではない，そのことに注目すると次の式を用いた方がよい。

$$x=\frac{a_0h_c}{i}\left[-u+F_a(u,N)+\frac{a_0^{-M}J}{N}F_a(v,J)\right]+C \tag{16}$$

$i_c=gP_{wc}/\alpha T_c C_c^2$，$(i_c/i)^{1/N}=a_0$（ただしコウ配 $-i$），$u=h/a_0h_c$，$v=u^{N/J}$，$J=N/(N-M+1)$，$F_a(u,N)=\int_0^u(u^N+1)^{-1}du$，$N=(2h/3A)\{5T-2R(dP_w/dx)\}$，$M=(h/A)\{3T-(A/T)(dT/dh)\}$

このように水深が計算あるいは実測によって得られたら次のようにして掃流力を求める。

Ⅰ） 圧力，流速の分布が等流の場合と相似な場合。

a) 等流が存在し得る水路の掃流力。

(7)，(14)式より

$$\tau=wQ^2/C^2A^2 \tag{17}$$

さらに等流の水理量に添字零をつけ，無次元表示すると，$\tau/\tau_0=(C_0A_0/CA)^2$，Chézy の係数に Manning の公式を用ふると

$$\frac{\tau}{\tau_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{A_0}{A}\right)^2,\quad \tau_0=wR_0 i \tag{18}$$

によって掃流力が計算され，例えば広長方

形断面であると

$$\tau/\tau_0 = (h_0/h)^{7/3}, \quad \tau_0 = w h_0 i \qquad (19)$$

$z = ay^2$ の広放物線形断面では $A = 4h^{\frac{3}{2}}/3\sqrt{a}$, $p_w \doteqdot T = 2\sqrt{h/a}$ であるから

$$\tau/\tau_0 = (h_0/h)^{\frac{10}{3}}, \quad \tau_0 = (2/3) w h_0 i \qquad (20)$$

b) 等流の流れが存在しない場合の掃流力。

$i = 0$, $i < 0$ の水路で水深が限界水深のときの水理量に添字 c をつけると、

$\alpha Q^2 T_c / g A_c^3 = 1.0$, $Q = gA_c^3/\alpha T_c$ これを(17)式に代入すると、$\tau = wgA_c^3/\alpha T_c C^2 A^2$, これを無次元表示すると $\tau/\tau_c = (C_c A_c / CA)^2$, $\tau_c = wR_c p_{wc} g / \alpha T_c C_c^2 = wR_c i_c$, Chézy の式に Manning の公式を用いると

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_c} &= \left(\frac{R_c}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{A_c}{A}\right)^2, \quad \tau_c = wR_c i_c \\ i_c &= n^2 g p_{wc} / \alpha T_c R_c^{\frac{1}{3}} = N_c \cdot p_{wc} / \alpha T_c \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

N は粗度係数を示す無次元量[(8)]である，(a)の場合と同様に広長方形，放物線形断面について次のように示される

$$\tau/\tau_c = (h_c/h)^{\frac{7}{3}}, \quad \tau_c = w h_c N_c / \alpha$$

$$\tau/\tau_c = (h_c/h)^{\frac{10}{3}}, \quad \tau_c = (2/3) w h_c N_c / \alpha$$

II] 圧力，流速分布が等流の場合と相似ではなく，壁面上の流速が測定された場合。

例えば平均径 d_m の移動床の場合には次の式より求められる

$$\left.\begin{aligned} v_*^{0.422} &= \left\{ v_b / 2.06 (g d_m)^{0.392} \right\}^2 \\ v_* &= \sqrt{\tau/\rho} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

5. 結論

一様断面開水路の定流下における，掃流力の表現について再確認を試みたが，それらの要旨から次のようなことが述べられる，それをもって結論とする。

I) 圧力分布，流速分布が共に等流の場合と相似である場合。

掃流力の表示には大別して次のように二

a) 抵抗法則を全然考えの中に入れないで，単に運動の条件式より表示される，例えば等流の場合は(1)式，不等流の場合は(10)式または(12)式によって表示される

b) 抵抗法則より表示する，例えば(2)または(14)式によって表示される。

従って掃流力の定義から出発して，掃流力を表現する場合には，仮定の比較的少ない，考え方にあまり無理のない，(10)式による表現が好ましいことを，筆者は提案したい。

II) 圧力，流速分布が等流の場合と相似でない場合。

掃流力の表示は(15)式によるのが妥当である，しかし f_b については今後に残された問題である。

以上の事項を述べて結論とする，なおこの研究は文部省科学試験研究費補助金を受けた研究課題の分担研究の一部であることを付記致します。

参考文献

(1) 藤本：応用流体力学；丸善，昭.20.

栗津：開水路等流に対する理論的考察；日大，昭.25.

(3) 岩垣：滑面開水路における乱流の抵抗法則；土木学会論文集16号，昭.28.

(2) 本間：標準水理学；丸善，昭.37.

(4) 栗津：河床物質の2，3の性質とその応用；土木学会論文集36号，昭.31

(5) 栗津：洗掘機構についての基礎的研究；土木学会論文集52号，昭.33

(6) Matzke：Varied Flow in Open Channels of Adverse Slope; Proc. A.S.C.E. 1936

(7) Chow：Open-channel Hydraulics；McGraw-Hill. 1959.

(8) 栗津：開水路不等流の相似理論的考察とその応用；土木学会誌，Vol.38. 昭.28.