Ⅱ－16　一様断面開水路における不等流函数表について

中央大学理工学部　正員　春日屋　伸昌

開水路不等流の運動方程式は，iを底こう配，hを水深，Vを平均流速，Cをシェジーの流速係数，Rを径深，gを重力加速度，αを補正係数とし，流れの方向にx軸をとると，

$$i-\frac{dh}{dx}=\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right)+\frac{V^2}{C^2R} \qquad (1)$$

流水断面積をA，水面幅をBとし，等流水深h_0および限界水深h_cに対応する量にはそれぞれ添字0およびcをつけて（1）式を変形すると，

$$\frac{dh}{dx}=i\,\frac{1-(C_0/C)^2(R_0/R)(A_0/A)^2}{1-(B/B_c)(A_c/A)^3} \qquad (2)$$

ブレッセ公式とトルクミット公式とは，いずれも$C=C_0$と仮定して，(2)式より，

$$\frac{dh}{dx}=i\,\frac{1-(R_0/R)(A_0/A)^2}{1-(B/B_c)(A_c/A)^3} \qquad (3)$$

さらに，ブレッセ公式では，幅広長方形断面を考えれば$R\fallingdotseq h$が成立するから，

$$\frac{dh}{dx}=i\,\frac{1-(h_0/h)^3}{1-(h_c/h)^3} \qquad (4)$$

(4)式を積分し，既知の水深h_1の地点と任意の水深hの地点との距離をℓとすれば，

$$\ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\left\{1-\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^3\right\}\left\{B(u_1)-B(u)\right\}\right| \qquad (5)$$

ここに，$u=h/h_0$，$u_1=h_1/h_0$　であって，ブレッセ函数$B(u)$は，

$$u<1\ ;\ B(u)=\int_0^u\frac{du}{1-u^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(1-u)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \qquad (6_1)$$

$$u>1\ ;\ B(u)=\int_\infty^u\frac{du}{1-u^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \qquad (6_2)$$

また，トルクミット公式では，放物線形断面を考えれば$B\propto h^{1/2}$，$A\propto h^{3/2}$，$R\propto h$　が成立するから，（3）式より，

$$\frac{dh}{dx}=i\,\frac{1-(h_0/h)^4}{1-(h_c/h)^4} \qquad (7)$$

$$\therefore\quad \ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\left\{1-\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^4\right\}\left\{T(u_1)-T(u)\right\}\right| \qquad (8)$$

ここに，トルクミット函数$T(u)$は，

$$u<1\ ;\ T(u)=\int_0^u\frac{du}{1-u^4}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u}+\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}u \qquad (9_1)$$

$$u>1\ ;\ T(u)=\int_\infty^u\frac{du}{1-u^4}=\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}+\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}u-\frac{\pi}{4} \qquad (9_2)$$

ブレッセ・トルクミットの仮定$C=C_0$の代わりに，物部・バクメテフ・チョーの各公式では，Cをマニング公式で書きかえて（$C=R^{1/6}/n$），同公式中の粗度係数nを水深に関して定数であると仮定する。そうすると，（2）式はつぎのようになる。

$$\frac{dh}{dx}=i\,\frac{1-(R_0/R)^{4/3}(A_0/A)^2}{1-(B/B_c)(A_c/A)^3} \tag{10}$$

ここで，$A\propto h^s$，$P\propto h^k$（P：潤辺の長さ）とおけば，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{i}{h_0}dx=\frac{u^N}{u^N-1}du-\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\frac{u^{N-M}}{u^N-1}du\\&u=h/h_0,\ N=2s+\frac{4}{3}(s-k),\ M=2s+1\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ところで，

$$\frac{u^N}{u^N-1}du=\left(1-\frac{1}{1-u^N}\right)du=du-\frac{du}{1-u^N} \tag{12$_1$}$$

$$\frac{u^{N-M}}{u^N-1}du=-\frac{1}{S}\frac{dv}{1-v^J}\left[v=u^S,\ S=N-M+1,\ J=\frac{N}{S}\right] \tag{12$_2$}$$

であるから，（11）式をxに関して0からlまで，uに関してはuからu_1まで（常流の場合）またはu_1からuまで（射流の場合）積分すれば，つぎの一般式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}&l=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\{F(u_1,N)-F(u,N)\}+\frac{1}{S}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\{F(v_1,J)-F(v,J)\}\right|\\&u=h/h_0,\ u_1=h_1/h_0;\ A\propto h^s,\ P\propto h^k,\ N=2s+\frac{4}{3}(s-k),\\&M=2s+1,\ S=N-M+1,\ J=N/S;\ v=u^S\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ここで，不等流函数$F(u,N)$はつぎのように定義される。

$$F(u,N)=\int_0^u\frac{du}{1-u^N}\ (u<1),\quad F(u,N)=\int_\infty^u\frac{du}{1-u^N}\ (u>1) \tag{14}$$

上の一般式において，$N=3$，$M=3$または$s=1$，$k=1/4$とすればブレッセ公式が，$N=4$，$M=4$または$s=3/2$，$k=3/4$とすればトルクミット公式がえられる。

放物線形断面に対しては，$s=3/2$，$k=1/2$（$R\propto h$であるから）とおいて，

$$l=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\left\{F\left(u_1,\frac{13}{3}\right)-F\left(u,\frac{13}{3}\right)\right\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^4\left\{F\left(u_1^{4/3},\frac{13}{4}\right)-F\left(u^{4/3},\frac{13}{4}\right)\right\}\right| \tag{15}$$

三角形断面に対しては，$s=2$，$k=1$とおいて，

$$l=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\left\{F\left(u_1,\frac{16}{3}\right)-F\left(u,\frac{16}{3}\right)\right\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^5\left\{F\left(u_1^{4/3},4\right)-F\left(u^{4/3},4\right)\right\}\right| \tag{16}$$

幅広長方形断面に対しては，$s=1$，$k=0$（$R\fallingdotseq h$であるから）とおいて，

$$l=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\left\{F\left(u_1,\frac{10}{3}\right)-F\left(u,\frac{10}{3}\right)\right\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^3\left\{F\left(u_1^{4/3},\frac{5}{2}\right)-F\left(u^{4/3},\frac{5}{2}\right)\right\}\right| \tag{17}$$

筆者は，$N=5/2$，3，13/4，10/3，4，13/3，16/3 のおのおのに対し，引数uを0.00（0.01）1.50（0.05）2.0（0.1）3.0（0.5）5（1）20（5）50として小数点以下4桁までの数値表を完成した。殊に(17)式は自然河川に対し有用であろう。