Ⅱ－8　開水路不定流（二，三の計算結果の比較）

建設省土木研究所　正員　王　方一

概要：1). 計算法の概要　　2). 二，三の計算の比較

§1. 基本方程式

$$A\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=\Delta q \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}=i_0-i_f+i_q \quad \cdots\cdots (2)$$

または

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=\Delta q \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\frac{1}{gA}\left[\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{Q}{A}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}\right]+\frac{\partial H}{\partial x}=i_0-i_f+i_q \cdots (4)$$

ここに $\Delta q=q_i-q_0$; $i_q=\frac{1}{gA}\left[\Delta\overline{qv\cos\theta}-U\Delta q\right]$; $\Delta\overline{qv\cos\theta}=q_iv_i\cos\theta_i-q_0v_0\cos\theta_0$; θ：河軸に対する横流入.出の角度；添字 (i) と (0) はそれぞれ流入と流出を示す；H：水深；$i=-\frac{\partial D}{\partial x}$ ；D：河床高；$i_f=n^2|U|U/R^{4/3}$ ；U：平均流速

§2 特性曲線法

[2.1]：式 (1) と (2) を用いる時

$A=aH^s$ の断面に対する (1), (2) 式の解[1]は

$$dt=dx/\Phi \text{ 上にて，} d(U+2s\omega)=\tilde{M} \quad \cdots\cdots (5)_a$$

$$dt=dx/\Psi \text{ 上にて，} d(U-2s\omega)=\tilde{N} \quad \cdots\cdots (5)_b$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{M}=g\Delta t\,(i_0-i_f+\varepsilon.i_*+i_{q_1})\\&\tilde{N}=g\Delta t\,(i_0-i_f+\varepsilon.i_*+i_{q_2})\\&i_{q_1}=\frac{1}{gA}\left[\Delta\overline{qv\cos\theta}-\Delta q.\Psi\right];\\&i_{q_2}=\frac{1}{gA}\left[\Delta\overline{qv\cos\theta}-\Delta q\Phi\right];\\&\Phi=U+\omega;\ \Psi=U-\omega;\ \varepsilon=U/\omega\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (5)'$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega=\sqrt{gH/s};\ i_f=n^2\left(\frac{g}{s}\right)^{4/3}|U|U/\omega^{8/3}\\&i_*=\frac{\omega^2}{ga}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\omega^2}{g}\left[\ln.\frac{s}{g}+2\ln\omega\right]\frac{\partial s}{\partial x}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

矩形であれば $a=B$; $s=1$; 従って (6) 式は次のようになる

$$\left.\begin{aligned}&\omega=\sqrt{gH};\ i_f=n^2g^{4/3}|U|U/\omega^{8/3}\\&i_*=\frac{\omega^2}{gB}\frac{\partial B}{\partial x}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

(a)：不定 Δx. 不定 Δt 方式：図-1において点 a, b での t, x U と ω を知って点 C のそれらを求めるのに ac と bc 上にそれぞれ $(5)_a$ と $(5)_b$ 式の差分表示を適用する。結果は次のようになる。

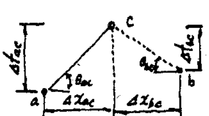

図-1

$$\omega_c=\frac{1}{4s_c}\left\{\Gamma_a-\Lambda_b+\tilde{M}_{ac}-\tilde{N}_{bc}\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$U_c=\frac{1}{2}\left\{\Gamma_a+\Lambda_b+\tilde{M}_{ac}+\tilde{N}_{bc}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

ここに $\Gamma_a=U_a+2s_a\omega_a$; $\Lambda_b=U_b-2s_b\omega_b$; $\tilde{M}_{ac}=f(U_{ac},\omega_{ac})$ $\tilde{N}_{bc}=f(U_{bc},\omega_{bc})$; U_{ac} は U_a と U_c の平均値を表わす. ω_c と U_c を假定して t_c と x_c を次の二式または図解法により求めて (8) と (9) 式の右辺に代入し左辺に等しいかどうかを試算し，所要の精度になるまで假定し直す。

$$t_c=\left\{\Delta x_{ab}+(\Phi_{ac}t_a-\Psi_{bc}t_b)\right\}/(\Phi_{ac}-\Psi_{bc}) \quad \cdots\cdots (10)$$

$$x_c=x_a+\Phi_{ac}\Delta t_{ac} \quad \cdots\cdots (11)$$

(b)：固定 Δx. 不定 Δt 方式：図-2において点 a, b, r での t, U と ω を知って点 d と e での t, U, ω を求める方法で ad と be 上にそれぞれ $(5)_a$ と $(5)_b$ 式の差分式を適用する. ただし Δx_{ad} と Δx_{be} は不変である. 整理すると次の形になる

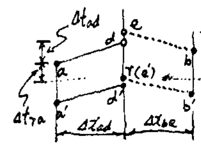

図-2

$$\omega_e=\left\{\xi(\Gamma_a+\tilde{M}_{ad})-(\Lambda_b+\tilde{N}_{be})+(1-\xi)\Gamma_r\right\}/2(s_d+s_e) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$U_e=2s_e\omega_e+(\Lambda_b+\tilde{N}_{be}) \quad \cdots\cdots (13)$$

$\omega_d=\zeta\omega_e+(1-\zeta)\omega_r \cdots\cdots (14)$; $U_d=\zeta U_e+(1-\zeta)U_r \cdots\cdots (15)$

ここに $\zeta=\{\Delta t_{ra}+\Delta t_{ad}\}/\{\Delta t_{rb}+\Delta t_{be}\}$; $\xi=1/\zeta$; $\Gamma_a=U_a+2s_a\omega_a$ $\Lambda_b=U_b-2s_b\omega_b$; $\Gamma_r=U_r+2s_d\omega_r$; $\Delta t_{ad}=\Delta x_{ad}/\Phi_{ad}$; $\Delta t_{be}=\Delta x_{be}/\Psi_{be}$ 。式(12)と(13)を満足させる点 d と e での U と ω を見出すのに逐次代入法を用いる。第1近似を求めるときに用いる最初の假定値は次のように選定する：$U_d=U_a+\Delta U_{a'd'}$; $\omega_d=\omega_a+\Delta\omega_{a'd'}$; $U_e=U_b+\Delta U_{b'e'}$ $\omega_e=\omega_b+\Delta\omega_{b'e'}$.

[2.2]：式 (3) と (4) を用いる時

任意の断面形に対する解[1]は

$$dt=dx/\Phi \text{ 上にて，} d\eta-\frac{dQ}{B\Psi}=E \quad \cdots\cdots (16)_a$$

$$dt=dx/\Psi \text{ 上にて，} d\eta-\frac{dQ}{B\Phi}=G \quad \cdots\cdots (16)_b$$

ここに

$$E=\frac{dx}{1-\varepsilon^2}\left\{\varepsilon^2(i_0+i_*)-i_f+i_{q_1}\right\}$$

$$G=\frac{dx}{1-\varepsilon^2}\left\{\varepsilon^2(i_0+i_*)-i_f+i_{q_2}\right\}$$

$\eta=H+D$; η：水位，$\omega=\sqrt{gA/B}$ ；B：表面巾

式 $(16)_a$ と $(16)_b$ を [2.1]-(b) の時と同様に ad と be 上に適用すれば次の諸関係式を得る.

$\eta_e = \{B_{be}\Phi_{be}(\eta_b+G_{be}) - Q_b - \xi[B_{ad}\Psi_{ad}(\eta_a+E_{ad}) - Q_a] - (1-\xi)(B_{ad}\Psi_{ad}\eta_r - Q_r)\}/(B_{be}\Phi_{be} - B_{ad}\Psi_{ad})$ ……(17)

$Q_e = Q_b + B_{be}\Phi_{be}\{\eta_e - (\eta_b+G_{be})\}$ ……(18)

$\eta_d = \xi\eta_e + (1-\xi)\eta_r$ ……(19); $Q_d = \xi Q_e + (1-\xi)Q_r$ ……(20)

最初の仮定値は [2.1](b)の場合と同様に選ぶ.

§3. 固定菱形格子点法

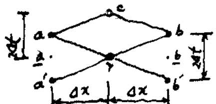

図-3

図-3のように菱形格子abrcを作成して(3)式を中央差分で表示すれば

$A_c = A_r - \Delta Q_{ab}.2\tau. + 2\Delta t.\Delta q$ ……(21)

を得る. ここに $\tau = \Delta t/2\Delta x$; 矩形であれば

$\eta_c = \eta_r - \Delta Q_{ab}/(\frac{B_{ab}}{2\tau}) + 2\Delta t\Delta q/B_{ab}$ ……(22)

また(3)式を(4)式に代入した式を差分で表わし, $Q=Q_{rc}$; $Q^2=Q_rQ_c$; $|Q|Q=|Q_r|Q_c$; i_gに含まれる$Q \doteqdot Q_r$とすれば

$$Q_c = \frac{Q_r(1+2\mu_{ab}) - 2g\tau A_{ab}\Delta\eta_{ab} + 2gA_{ab}\Delta t.i_g'}{1+2K_{abr} - 2\mu_{ab} - 2\varepsilon_{abr}} \quad \cdots\cdots (23)$$

を得る. x_iでηを求め x_{i+1}では Q を求める風に(22)と(23)を交互に用いる

ここに $K_{abr} = gn^2\Delta t|U_{abr}|/R_{ab}^{4/3}$; $U_{abr} = Q_r/A_{ab}$

$\mu_{ab} = (A_c - A_r)/2A_{ab}$; $\varepsilon_{abr} = \tau.U_{abr}.(A_b - A_a)/A_{ab}$;

$A_{ab} = f(\eta_{ab})$; $\eta_{ab} = \frac{1}{2}(\eta_a+\eta_b)$; $i_g' = i_g - \frac{U_{abr}}{gA_{ab}}$

$\eta_r = \eta_{ab} - \frac{1}{4}(\eta_a+\eta_b-\eta_{a'}-\eta_{b'})$ or $= \eta_{ab} - \frac{1}{2}(\eta_a+\eta_b-\eta_{a'}-\eta_{b'})$

矩形であれば $A_{ab}=B_{ab}H_{ab}$; $A_a=B_aH_a$; $A_b=B_bH_b$

$\mu_{ab} = (\eta_{ab}-\eta_r)/H_{ab}$; $H_{ab} = \eta_{ab} - D_{ab}$

§4. 計算結果の比較

例1: [2.1]の(a)項の方法による例[1a], 矩形時(8)(9)(10)(11)式を用いる

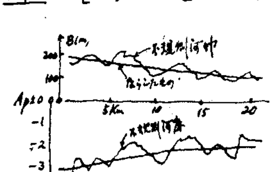

図-4a

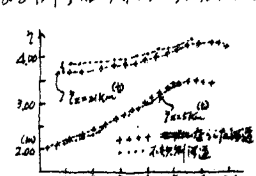

図-4.b. x=5Km, 21Kmでの水位

図-4aのような隅田川の河川と河床について初期流量-500m³/s 海側でキテイ公園の水位曲線, t=0のとき Q=-1000m³/s, x=21,000mで Q=-1000m³/s=Const の条件で計算した結果は図-4bのようになる. 不規則河道とそれをならした河床と巾による計算水位の相違を示す. ただし $i_g=0$として式を用いた。計算は手動計算機によった。

例2: [2.1]の(b)項の方法による例[1a.b]

図-5aのような20Kmまで漸変, 以遠一様幅の矩形水路を想定する. 河床は一様の $i_0=0.5\times10^{-4}$ 海側で $\eta=1.50+a\sin\frac{2\pi}{T}t$; a=1m; D=-3m

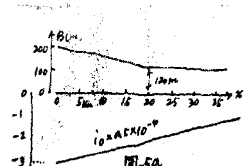

図-5a

の条件を与え, t=0 のとき Q=-500m³/s の定常状態より出発して矩形時の(12)(13),(14)と(15)式で計算した所, 図5-b, 5-c

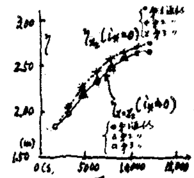

図-5b. x_2=10Kmでの水位

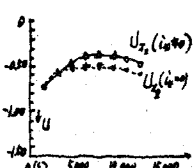

図-5c. x_2=10Kmでの流速

のようになった。i_*の有りと省略による相違は本文の図の大きさでも目立つが, 第一; 第二, 第三の近似値は水位の図での相違が区別出来ない程接近している. 計算は FACOM128B 型電子計算機によった。積法は違ない. Δxは一律に5Km.

例3: [2.2]の方法による例[1.b]

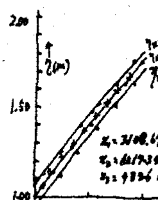

図-6a

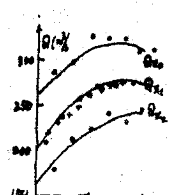

図-6b

隅田川の言問橋～小台橋間 9326m を3区間に分け, 観測資料を条件に, 矩形時の(17)(18)(19)と(20)式で計算すると図-6aと6bのようになった. 実線は観測, ••••は計算値; ただし i_*は省略しており, $i_g=0$, また計算値は第一近似即ち試算なし, 計算は計算尺によった。

例4: §3の方法による例

$i_g=0$, $\varepsilon_{abr}=0$として(22)と(23)式を用いて例3と同じ条件で計算したのが図6aと6bの++++で示されている. 河巾と河床は区間等積平均値を使ったがそれに区分点での数値を使用した場合との比較は別の機会に譲る.

文献:

1) 王方一: (a).<開水路不定流計算の一方式> 第17回(1962)土木学会講演概要第II部; (b).<開水路非定常流の計算法と例>: 土木技術資料 1963-No.5

2). 岸力. 王方一: <東京都高潮調査中間報告> 土研海岸研究室, がり版 (1957年12月)

3) 王方一: <差分法による……> 土木技術資料 1961-No.7, No.10

以上 (1963年3月)