

II - 2

不定流の特性曲線に関する二、三の考察

名古屋大学工学部 正員 足立昭平

水流の運動方程式において、加速度項が重力項および抵抗項に比較して省略可能であるような河道領域と、水面勾配がきわめて小さくて重力の項が小さく、抵抗項も小さい湛水領域とを結ぶ遷移領域では基礎方程式の各項の order が同じであると考えねばならない。断面形状が一様な水路における一次元水流の基礎方程式は次の特性方程式で与えられる。

$$dx/dt = u \pm c, \quad d(u \pm 2mc)/dt = g(S - S_f) \quad (1)$$

ここに、複符号はそれぞれ正および負特性曲線をあらわし、 x は流下距離、 t は時間、 u は平均流速、 c は波速、 g は重力の加速度、 S は水路床勾配、 m は水路断面形状に関する係数で、流水断面積 A が水深 h に対して (2) 式で与えられるものとする。

$$A = ah^m \quad (a \text{ は定数}) \quad (2), \quad \text{また} \quad c = \sqrt{gh/m} \quad (3)$$

(1) 式を近似差分方程式におきかえて、数値解あるいは図式解を求める試みは目新しいことではなく、とくに高速度計算機の発達はその手法における最大の難点であった計算労力の問題を解消してしまつたようにも見える。しかしながら、高速度計算機の優れた機能をたんなる計算力としてだけでなく、現象の特性を洞察する頭脳として活用するための、すべての問題が解決されたわけではない。差分法による近似解法を高速度計算機によって演算する大方の場合は格子法がとられる。これは (1) 式で与えられる特性曲線そのものを追跡する手法が、特定の地点あるいは時刻における状態を求めるのに手数を要し、実際上不便であることから当然のことではある。しかし河道から湛水部へ至る水流の特性を見る目的に対しては、特性曲線の追跡を再評価する必要があるように思われる。特性曲線の従来の解法では、たとえ計算労力は高速度計算機に負わせるとしても、反復計算の終末に対する限界値の指定に問題があり、反復計算を避ける従来の手法では、著者もかつてその一つを提案したが、たんに計算の簡易化だけにとどまり、特性曲線に沿う水流特性の追跡には適当でない。本報告はこうした目的に対して高速度計算機を活用のために、差分法による特性曲線の近似解を求めた結果に関するものである。

近似差分方程式の展開に先立って、原式 (1) を無次元化する。 h, c, u, x, t, A および流量 Q の無次元量をそれぞれ、 H, C, U, X, T, Λ および Ω の記号であらわし、それぞれに関する unit を * を付した記号であらわす。諸量の unit の相互関係を (4) 式のように与えれば、(1) 式は (5) 式のように無次元化され、 H, C, U, Λ, Ω は (6) 式で関係づけられる。

$$c_* = u_* = \sqrt{gh_*/m}, \quad x_* = h_*/mS, \quad t_* = \sqrt{h_*/mg} S, \quad A_* = ah_*^m, \quad Q_* = u_* A_* \quad (4)$$

$$dx/dt = U \pm C, \quad d(U \pm 2mC)/dT = E, \quad [\text{複符号は正および負特性曲線をあらわす}] \quad (5)$$

$$C = \sqrt{H}, \quad \Lambda = H^m, \quad \Omega = U\Lambda = UH^m = UC^{2m} \quad (6)$$

ここに、 $E = 1 - (S_f/S)$ であつて、 S_f を Manning 型で $S_f = n^2 u^2 / (h/m')^{M/2}$ とおけば、

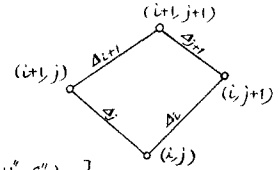
$$E = 1 - NK \quad (7), \quad \text{ただし,} \quad K = U^2/c^M, \quad N = c_*^2 n^2 / S (h_*/m')^{M/2} \quad (8)$$

である。(8) 式において、 $n^2/S (h_*/m')^{M/2}$ は水深 h_* の等流速 c であるから、 N は水深 h_* で等

流状態のときの Froude 数の 2 乗の逆数である。そして、 N がある特定値をもつように h_* を選ぶことにすれば (たとえば、 h_* の値を水路勾配 S に対する限界水深に選べば、 $N=1$ である) 無次元された特性方程式 (5) は一つの水路断面形状に対して普遍性をもつ。同方程式において同じ大きさの差分間隔が、実単位では、勾配が大きい場合ほど小さい量に相当する。すなわち、同じ精度の差分近似を得るためには、勾配が大きいほど実単位で細かく差分をとる必要がある。さて、(5) 式の近似差分方程式であるが、個々の特性曲線の推移を重視するから、正および負特性曲線群が $X-T$ 平面上で形成する網目に着目する。正特性曲線 i および $i+1$ 曲線と負特性曲線 j および $j+1$ 曲線でつくられる網目において、各特性曲線に沿う差分をそれぞれ Δ_i, Δ_{i+1} および Δ_j, Δ_{j+1} の記号であらわせば、

$$\Delta_{i+1} - \Delta_i = \Delta_{j+1} - \Delta_j = \varepsilon \quad \dots \dots \dots (9)$$

である (ε も差分記号の一つとして用いる)。したがって、各特性曲線に関する (5) 式は次のように書きあらわされる。



$$i \text{ 曲線: } \begin{cases} \Delta_i X = (U+C) \Delta_i T + \frac{1}{2} (\Delta_i U + \Delta_i C) \Delta_i T + O(\Delta_i T^3), & [O(\Delta_i T^3) = -\frac{\Delta_i T^3}{12} (U_i'' + C_i'') \dots] \\ \Delta_i U = E \Delta_i T - 2m \Delta_i C + \frac{1}{2} \Delta_i E \Delta_i T + O(\Delta_i T^3), & [O(\Delta_i T^3) = -\frac{\Delta_i T^3}{12} E_i'' \dots] \end{cases}$$

$$j \text{ 曲線: } \begin{cases} \Delta_j X = (U-C) \Delta_j T + \frac{1}{2} (\Delta_j U - \Delta_j C) \Delta_j T + O(\Delta_j T^3), \\ \Delta_j U = E \Delta_j T + 2m \Delta_j C + \frac{1}{2} \Delta_j E \Delta_j T + O(\Delta_j T^3). \end{cases}$$

$$i+1 \text{ 曲線: } \begin{cases} \Delta_{i+1} X + \varepsilon_X = (U+C+\Delta_j U + \Delta_j C) (\Delta_i T + \varepsilon_T) + \frac{1}{2} (\Delta_i U + \Delta_i C + \varepsilon_U + \varepsilon_C) (\Delta_i T + \varepsilon_T) + O(\Delta_{i+1} T^3), \\ \Delta_{i+1} U + \varepsilon_U = (E + \Delta_j E) (\Delta_i T + \varepsilon_T) - 2m (\Delta_i C + \varepsilon_C) + \frac{1}{2} (\Delta_i E + \varepsilon_E) (\Delta_i T + \varepsilon_T) + O(\Delta_{i+1} T^3). \end{cases}$$

$$j+1 \text{ 曲線: } \begin{cases} \Delta_{j+1} X + \varepsilon_X = (U-C+\Delta_i U - \Delta_i C) (\Delta_j T + \varepsilon_T) + \frac{1}{2} (\Delta_j U - \Delta_j C + \varepsilon_U - \varepsilon_C) (\Delta_j T + \varepsilon_T) + O(\Delta_{j+1} T^3), \\ \Delta_{j+1} U + \varepsilon_U = (E + \Delta_i E) (\Delta_j T + \varepsilon_T) + 2m (\Delta_j C + \varepsilon_C) + \frac{1}{2} (\Delta_j E + \varepsilon_E) (\Delta_j T + \varepsilon_T) + O(\Delta_{j+1} T^3). \end{cases}$$

$$\text{また (7), (8) } \begin{cases} \Delta_k E = -K [\{ 2 (\Delta_k U/U) - M (\Delta_k C/C) \} + \{ (\Delta_k U/U)^2 + M(M+1) (\Delta_k C/C)^2 - 2M (\Delta_k U \Delta_k C/UC) \} + \dots], & (k=i, j) \\ \varepsilon_E = -K [2 (\varepsilon_U/U) - M (\varepsilon_C/C) + 2 (\Delta_i U \Delta_j U/U^2) + 2M(M+1) (\Delta_i C \Delta_j C/C^2) - 2M (\Delta_i U \Delta_j C + \Delta_j U \Delta_i C)/UC + \dots] \end{cases}$$

これらの方程式から $\varepsilon_T, \varepsilon_X, \varepsilon_U, \varepsilon_C$ を $\Delta_i T, \Delta_j T$ および $\Delta_i C, \Delta_j C$ の関数として求める結果は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= \left[-\frac{2m+1}{2c} F_1 \right] + \frac{KE}{20c} G_2 + \frac{K}{20c} F_2 \left\{ m \tau_2 - \frac{U}{4c} (m+1) M \tau_1 \right\} + \frac{1}{20c} F_1 \left\{ K \tau_1 + \frac{U}{c} \left(\frac{2m+1}{4} E - \frac{M}{4} K \right) \tau_2 + \frac{U}{c} \frac{(2m+1)(2m+3)}{4} \delta_1 \right\} + O(\Delta T^4), \\ \varepsilon_X &= \left[EG + \frac{2m+1}{2} \left(F_2 - \frac{U}{c} F_1 \right) \right] - \frac{KE}{2U} G \left\{ 3 \tau_1 - \frac{U}{c} \tau_2 \right\} - \frac{KF_2}{2U} \left\{ 3m \tau_1 + \left(\frac{U}{c} \right)^2 \frac{(m+1)M}{4m} \tau_1 - \frac{U}{c} \left(m - \frac{m-1}{4m} M \right) \tau_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{20} F_1 \left\{ (m-1) K \tau_2 - \left(\frac{U}{c} \right)^2 \left(\frac{M}{4} K - \frac{2m+1}{4} E \right) \tau_2 - \frac{U}{c} \frac{5(2m+1)}{4} E \tau_1 + \frac{U}{c} (m+1 + \frac{3M}{4}) K \tau_1 + \left(\frac{U}{c} \right)^2 \frac{(2m+1)(2m+3)}{4} \delta_1 - \frac{U}{c} \frac{(2m+1)(6m+1)}{4} \delta_2 \right\}, \\ \varepsilon_C &= \left[-\frac{K}{c} \left(F_1 - \frac{M}{4m} \frac{U}{c} F_2 \right) \right] - \frac{K}{2U^2} F_1 \{ (E-K) \tau_1 + \frac{U}{c} \frac{M}{4m} K \tau_2 - \frac{U}{c} (m+1 + \frac{3M}{4}) \delta_1 + 2m \delta_2 + \left(\frac{U}{c} \right)^2 \frac{(2m+1)M}{8m} \delta_1 \} - \frac{U}{c} \frac{KF_2}{2U^2} \left\{ \frac{M}{4m} (2E-K) \tau_1 + \frac{U}{c} \left(\frac{M}{4m} \right) K \tau_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{U}{c} \frac{M(M+1)}{2m} \delta_1 - M \delta_2 \right\}, \\ \varepsilon_U &= \left[-\frac{2}{c} \{ EK G + m K F_2 - \frac{U}{c} \left(\frac{M}{4} K - \frac{2m+1}{4} E \right) F_1 \} \right] - \frac{KE}{U^2} G \left\{ (E-2K) \tau_1 + \frac{U}{c} \frac{E}{2} \tau_2 \right\} \\ &\quad + \frac{KF_2}{U^2} \left\{ [m(E-K) + \left(\frac{U}{c} \right)^2 \frac{M}{8}] \tau_2 + \frac{U}{c} \left\{ \left(\frac{5}{2} m + M + 1 \right) E - \frac{3M}{4} K \right\} \tau_1 + \frac{U}{c} m \left\{ \frac{3}{2} (2m+1) + M \right\} \delta_2 - \left(\frac{U}{c} \right)^2 M \left\{ \frac{M+1}{2} + \frac{3(2m+1)}{8} \right\} \delta_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{KF_2}{U^2} [2m(E-K) + \left(\frac{U}{c} \right)^2 \frac{M}{16m} (2mE-MK) \right] \tau_1 + \frac{U}{c} \left\{ \frac{M+1}{2} E - \frac{M}{4} K \right\} \tau_2 + 2m^2 \delta_2 - \frac{U}{c} m M \delta_1 \right]. \end{aligned}$$

ここに、 $F_1 = \Delta_j C \Delta_i T + \Delta_i C \Delta_j T$, $F_2 = \Delta_j C \Delta_i T - \Delta_i C \Delta_j T$, $G = \Delta_i T \Delta_j T$, $\tau_1 = \Delta_i T + \Delta_j T$, $\tau_2 = \Delta_i T - \Delta_j T$, $\delta_1 = \Delta_j C + \Delta_i C$, $\delta_2 = \Delta_j C - \Delta_i C$ であり、 U および C は i 曲線と j 曲線との交点 (i, j) における値である。これらの式はすこぶる複雑に見えるが、反復計算の必要がなく、とくに、各式において $O(\Delta T^2)$ のオー項を以下の $O(\Delta T^3)$ の項と比較することによって、差分近似の精度を推量できる。さらに特性曲線に沿う特性の推移は、オー項によって検討することができ、たとえば、peak の進行が必ずしも正特性曲線に一致しないことなども容易に知ることができ、なお初期条件は $\Omega = UC^{2m} = \text{一定}$ から、境界条件は (9) 式に代る $\Delta T = \Delta_i + \Delta_{j+1} = \Delta_j + \Delta_{i+1}$ から求められる。