Ⅱ－1　水理学における次元解析の長さのベクトル的取扱について

日本大学　正員　木村喜代治

次元解析の問題で長さや質量などをベクトル的に取扱うことにより，その基本次元の数を増やし，未知指数に関する関係式の数が増えて，より完全に解ける場合のあることは良く知られている．長さをベクトル的に取扱う問題の多くは円などの如く平面曲線の直角2方向について対称な場合であり，このときその2方向に対してべき指数をそれぞれ$\frac{1}{2}$に取っている．本報では，任意の曲線が与へられたとき各方向のべき指数をどう決めるか，と言う問題を取扱った．

いま直交3軸をx, y, zとする立体座標を取り，空間直線を考へる

i) 空間直線の次元は　$[S]=[L_x^p \cdot L_y^q \cdot L_z^r]$　とし，　$p+q+r=1$　かつ　$0 \leq \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} \leq 1$ とする．

ii) ある一つの方向に平行な直線の次元はその方向の次元（例へばx方向なら$[L_x]$）を有する．

iii) 各方向に対して対称なとき　$p=q=r$　である．

以上の3条件は極く普遍のものである．さてこれらの指数にそれぞれの方向余弦の2乗を取れば以上の条件はすべて満足することがわかる．

さて各方向の代表長としてそれぞれa, b, cを取ると，その線長Sは

$$S = K a^p b^q c^r \qquad (1)$$

で表わす．ここでKは無次元として取扱い形状，方向および代表長の取り方などによつて変わる係数である．空間曲線の場合に，このべき指数は平均値を取るものとすると

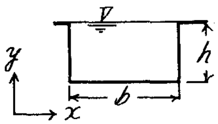
$$\left.\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{S}\int p \cdot ds = \frac{1}{S}\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds = \frac{1}{S}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\,dx \\ q_m &= \frac{1}{S}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}\,dy \\ r_m &= 1-(p_m+q_m) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

一般に水理学では潤辺などのように平面曲線を取ることが多いから，$x-y$ 平面に関しては

$$\left.\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{S}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\,dx \\ q_m &= 1-p_m \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

また曲線の各点で法線方向に取るもののべき指数は，2次元の場合，単にp_mとq_mとが入れ変はることになる．水理学ではこれは潤辺と径深との関係である．以下添字mを省略する．この指数について2・3の計算例を挙げる

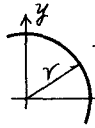
例 1．長方形（用水路）の潤辺．



$p=\frac{1}{2h+b}\times(2h\times0^2+b\times1^2)=\frac{b}{2h+b}$, $q=1-p=\frac{2h}{2h+b}$

若し幅の極めて広いときは $p=1$, $q=0$, すなわち $[S]=[L_x]$

例 2. 円の周長

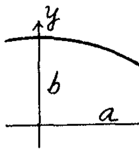


$x^2+y^2=r^2$

$$p=\frac{1}{S}\,\frac{1}{r}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot dx=\frac{1}{2},\quad q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

すなわち $[S]=[L_x^{\frac{1}{2}}\cdot L_y^{\frac{1}{2}}]$

例 3. だ円の周長



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$p=\frac{1}{S}\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-y^2}{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}y^2}}\cdot dy=\frac{1}{k^2}\left[1-k'^2\frac{K}{E(\frac{\pi}{2})}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a^2-b^2\frac{K}{E(\frac{\pi}{2})}\right],\quad q=\frac{1}{a^2-b^2}\left[b^2\frac{K}{E(\frac{\pi}{2})}-b^2\right]$$

ただしK, $E(\frac{\pi}{2})$ はそれぞれ第一種および第二種完全だ円積分, $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$：母数, k'：補母数である。

ある物理量の間の関数関係を本法で求めるとき，形状の変化まで含んだ解を得ることは，いまのところ困難で（これは形状の変化により変わる無次元未知関数が含まれるからである），相似形のときに当てはまるより完全な解が得られるのである．簡単な例題として断面積 A，潤辺 S なる一様断面管路を流れる層流の流量公式を導いてみる．

$$Q=C\,\Delta p^{\alpha}\cdot\mu^{\beta}\cdot l^{\gamma}\cdot A^{\delta}\cdot S^{\varepsilon}$$

流れの方向に x 軸，直角にそれぞれ y，z 軸を取ると

圧力差：$[\Delta p]=[L_xL_y^{-1}L_z^{-1}MT^{-2}]$，粘性係数：$[\mu]=[L_x^{-1}L_y^{(1-2n_1)}L_z^{(2n_1-1)}MT^{-1}]$，

管長：$[l]=[L_x]$，断面積：$[A]=[L_yL_z]$，潤辺：$[S]=[L_y^{n_2}L_z^{1-n_2}]$

ここで粘性係数の次元は、一つの等速度線に沿った値を $[\mu]=[\mu_y^{1-n}\mu_z^{n}]$ とし断面の平均の n を n_1 で表わしたときのものである。これより

$$Q=\frac{C\Delta pA^2}{\mu l}\left(\frac{A}{S^2}\right)^{\left(\frac{2n_1-1}{2n_2-1}\right)}=C'\,\frac{\Delta p\cdot A^2}{\mu l}$$

前述の如く C' は，y，z 方向の代表長をそれぞれ a，b としたとき，b/a の関数である．だ円管のとき長短軸の半分を a，b とすれば，理論式と比較すると $C'=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(a/b+b/a)}$ である．

河川などの実験に良く用いられる歪み模型において，ある量の縮尺の計算に，この種の線量（例えば潤辺など）の入ったものは，非歪み模型のときとは異なり，単に次元解析のべき指数の計算のみからでは決まらない．これは前述の様に，形状の相違により変わる無次元量が入っているからである．

有益な助言と激励とを与へられた日本大学栗津清藏教授に厚く御礼申し上げます．