

I-85 行列による吊橋の解析

東大教授 正員 奥村敏恵
 ○東大大学院学生 吉田 裕

1. 概要

この方法は、吊橋を解析する際、一般の吊橋理論に於て採られているように吊材の伸びを無視すれば吊橋に作用する或る荷重状態に対して吊橋補剛桁の鉛直変位量とケーブルの鉛直変位量とが等しくなる。そこで補剛桁及びケーブルの変形を仮定して、補剛桁が分担する荷重 W_1 及びケーブルが分担する荷重 W_2 がこの変位量 Δ の関数として求まれば、

この W_1 と W_2 の和が実際に吊橋に及ぼる作用荷重 W に等しくなるから、作用荷重 W と変位 Δ の関係が求まるという考えから出発している。

2. 補剛桁の変形と荷重の関係

補剛桁の変位 Δ と補剛桁が分担する荷重 W_1 との関係は、補剛桁の荷重と変位との関係

$\Delta = F \cdot W_1$ と規定するマトリックス F を導いておけば $W_1 = F^{-1} \cdot \Delta$ となる。

3. ケーブルの変形と荷重の関係

死荷重載荷後のケーブルの平衡位置よりケーブル上各吊材取附点の座標 (x_i, y_i) を求めて各ケーブル部材の x 軸上の射影長及び y 軸上の射影長 X_i, Y_i を求めておけば

活荷重載荷によるケーブルの変位 Δ とケーブルが分担する荷重 W_2 の関係は次のようになる。

即ち $W_2 = \Delta H \{ C - H_d \cdot D \} + (H_d + \Delta H) \cdot E \cdot \Delta - \alpha \cdot \epsilon \cdot (H_d + \Delta H) \cdot G$

こゝに ΔH は活荷重載荷によるケーブル張力の水平成分 H の増加量である。

又 C, D, E, G はそれぞれ次のような形のマトリックスである。

$$\text{即ち } C = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} - C_n \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 - D_2 \\ D_2 - D_3 \\ \vdots \\ D_{n-1} - D_n \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_1 + E_2, & -E_2, & & & 0 \\ -E_2, & E_2 + E_3, & -E_3, & & \\ & -E_3, & E_3 + E_4, & -E_4, & \\ 0 & & & & -E_{n-1}, & E_{n-1} + E_n \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 - G_2 \\ G_2 - G_3 \\ \vdots \\ G_{n-1} - G_n \end{bmatrix}$$

又各マトリックスの成分 C_i, D_i, E_i, G_i は次のようになる。

$$C_i = \frac{Y_i}{X_i} \quad D_i = \frac{1}{E_c A_c} \cdot \frac{Y_i \cdot L_i^3}{X_i^3} \quad E_i = \frac{1}{X_i} + \frac{Y_i^2}{X_i^3} \quad G_i = \frac{Y_i \cdot L_i^2}{X_i^3}$$

4. 実際に吊橋に作用する荷重と変位との関係

以上により実際に吊橋に作用する活荷重 W と吊橋の変位 Δ との関係は

$$W = W_1 + W_2 = \{ (H_d + \Delta H) \cdot E + F^{-1} \} \cdot \Delta + \Delta H \{ C - H_d \cdot D \} - \alpha \cdot \epsilon \cdot (H_d + \Delta H) \cdot G$$

となるから変位 Δ は次式で与えられる。

$$\Delta = \{ (H_d + \Delta H) \cdot E + F^{-1} \}^{-1} \{ W - \Delta H \{ C - H_d \cdot D \} + \alpha \cdot \epsilon \cdot (H_d + \Delta H) \cdot G \}$$

5. ケーブル張力の水平成分 H の変化量 ΔH

ケーブル部材の部材端の相対変位量 $\delta X_i = \delta x_i - \delta x_{i-1}$ は次のようになる。

$$\delta X_i = -\frac{Y_i}{X_i} \cdot \delta Y_i + \frac{L_i^3}{E_c A_c X_i^3} \cdot \Delta H + \alpha \cdot \epsilon \cdot \frac{L_i^2}{X_i}$$

今塔頂が水平方向に抵抗しないものとするは ΔH は側径間に於ても等しくなるから側径間も含めて考えることが出来る。ゲートル・アンカーの位置は不変であるから

$$\sum_{i=1}^n \delta X_i = -\Delta^* \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} - C_n \end{bmatrix} + \frac{\Delta H}{E_c A_c} \sum_{i=1}^n \frac{L_i^3}{X_i^2} + \alpha \cdot \Delta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{X_i} = \delta x_n - \delta x_0 = 0$$

という条件式を得ることが出来る。

$$\text{次に } \Delta = [(H_A + \Delta H) \cdot E + F^{-1}]^{-1} \{ W - \Delta H \cdot [C - H_A \cdot D] + \alpha \cdot \Delta \cdot (H_A + \Delta H) \cdot G \}$$

$$\text{であるから } \Delta_1 = [(H_A + \Delta H) \cdot E + F^{-1}]^{-1} \{ W + \alpha \cdot \Delta \cdot H_A \cdot G \}$$

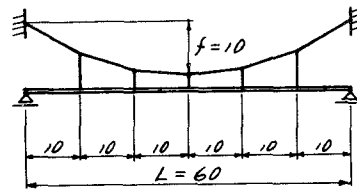
$$\Delta_2 = [(H_A + \Delta H) \cdot E + F^{-1}]^{-1} \{ C - H_A \cdot D - \alpha \cdot \Delta \cdot G \}$$

$$\text{とおけば } \Delta = \Delta_1 - \Delta H \cdot \Delta_2 \quad \text{と表わすことが出来} \quad -\Delta^* \cdot C = \Delta H \cdot \Delta_2^* \cdot C - \Delta_1^* \cdot C$$

となるから、これを上式に代入して ΔH を規定する式として次式を得る。

即ち、

$$\Delta H = \frac{\Delta_1^* \cdot C - \alpha \cdot \Delta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{X_i}}{\Delta_2^* \cdot C + \frac{1}{E_c A_c} \sum_{i=1}^n \frac{L_i^3}{X_i^2}}$$



6. 補剛桁の曲げモーメント

補剛桁が分担する荷重 W_i は変位 Δ が決

れば $W_i = F^{-1} \Delta$ として求まる。

故に補剛桁の曲げモーメントは補剛桁

そのものに W_i が作用したものととして解け

はよい。即ち補剛桁の荷重と曲げモー

メントの関係を規定するマトリックス B_M

を導入すれば $M = B_M \cdot W_i$ となる。

7. 数値計算

右上図のようなモデルについて数値計

算を行い変位 Δ 及び曲げモーメント M を

線型化された撓度理論による解と比較

したのが右下図である。この図より

本方法による解が微分方程式による解

とかなり良く一致していることと分かる

おその差を見逃がすことは出来ない。

違いの生じた原因はこのモデルの吊材

間隔が橋の大きさに比べてかなり大き

いからである。微分方程式による解で

は吊材の間隔を無視しているが本方法

ではこれを考慮しているのが本方法に

による解の方が実際に近い値となってい

ると思う。なお詳細は私の修士論文を

参照して下さい。

—— 本方法による解
—— 線型化された撓度理論による解

