

京都大学工学部 正 員 白石 成人

同 上 学生員 宇都宮 英彦

同 上 学生員 岩田 輝俊

1. まえがき

つり橋の動的性状を解明するにあたって、従来の理論は微小変形の仮定のもとに、ケーブルの変形は鉛直下方のたわみによって近似されるとしている。しかしながら、つり橋が他の橋梁形式に比較して、たわみ易い構造物であることを考慮すると、外力が作用する形式によってはかなり大きなケーブルの水平変位を生ずることが考えられる。また、つり橋の動的解析において、振動数の計算などではケーブルの剛性が大きな因子となっていることから、ケーブルの変形を *explicit* に含む、つり橋の自由振動の基礎方程式を誘導し、2, 3 の場合について数値計算をおこなった。この研究は、できるだけ一般的に、つり橋の振動性状を解明せんとする目的から、理論的考察をおこなったものである。

2. 基礎方程式の誘導

つり橋の自由振動を解析するために、図-1 に示すようなケーブル、補剛桁、ハンガーよりなる構造系を考え、座標を図示のように選定する。補剛桁の橋軸方向、橋軸直角方向、鉛直方向の変位をそれぞれ $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ とし、補剛桁中心線の変位を $u_0(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$ 、また中心線に関する振り角を $\theta(x)$ とすれば、

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x) - \frac{\partial w_0}{\partial x} z - \frac{\partial v_0}{\partial x} y \\ v(x, y, z) &= v_0(x) - \theta(x) \cdot z \\ w(x, y, z) &= w_0(x) + \theta(x) \cdot y \end{aligned} \quad (1)$$

となる。これより、補剛桁の変形エネルギーを求めると

$$\frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left[(\lambda + 2\mu) \left\{ I_y \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right\} + \mu (I_y + I_z) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2)$$

のようになる。 I_y , I_z はそれぞれ y 軸, z 軸に関する断面 2 次モーメント, λ, μ は Lamé の常数である。式(2)においては、変形変形に対する主桁の曲げ抵抗を考慮していないが、これを加えても式の形は何ら影響されず、同じ形となる。上と同様に、 u, v, w をケーブルの橋軸方向、橋軸直角方向、鉛直方向の変位とし、 $E_c A_c$ をケーブルの Young 係数、断面積とすれば、微小要素 dx に対するケーブルのひずみエネルギーはつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} d\epsilon &= \left[\sqrt{(h-w')^2 + (1+u')^2 + (v')^2} - \sqrt{1+h^2} \right] dx \\ &= \sqrt{1+h^2} \left\{ \frac{u'-hw'}{1+h^2} + \frac{1}{2} \frac{(w')^2 + 2hw'u' + h^2u'^2}{(1+h^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{(v')^2}{1+h^2} \right\} dx \end{aligned} \quad (3)$$

これよりケーブルのひずみエネルギーは

$$\frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} E_c A_c \left\{ (1+h^2) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] + \int_{-l/2}^{l/2} H_w \sqrt{1+h^2} \left(\frac{du}{dx} \right) dx \right\} dx \quad (4)$$

となる。 H_w はケーブル張力の水平成分である。図-2 に示すように、つり橋構造では 2 本のケーブルの変位は同じでないから、図のように suffix $1, 2$ を付けて区別すると、ケーブルの全ひずみエネルギーを計算することができ。

運動エネルギーは、上と同様の表示を用いれば、それぞれ補剛桁、ケーブルについて

$$T_f = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{w_f}{g A_f} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \right)^2 + (I_y + I_z) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + A_f \left(\frac{\partial w_f}{\partial t} \right)^2 + A_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{w_c}{g} \sqrt{1+h^2} (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2 + \dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2) dx \quad (6)$$

をうる事ができる。さらに補剛桁、ケーブルの鉛直変位による仕事を求めると、

$$W = \int_{-l/2}^{l/2} [w_f w_o + w_c \sqrt{1+h^2} (w_l + w_r)] dx \quad (7)$$

となる。式(5),(6),(7)で w_f は補剛桁単位長さあたりの自重、 w_c はケーブル1本単位長さあたりの自重、 A_f は補剛桁の純断面積である。いま、ハンガーの長さが変わらないと仮定すれば

$$f_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_l}{\partial x} - u_l \right)^2 + (v_o - v_l)^2 + \left(h + w_o + \frac{b\theta}{2} - w_l \right)^2 - h^2 = 0 \quad (8)$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial x} + u_r \right)^2 + (v_o - v_r)^2 + \left(h + w_o - \frac{b\theta}{2} - w_r \right)^2 - h^2 = 0 \quad (9)$$

をうる。全運動エネルギーを T 、全ひずみエネルギーを U 、Lagrange 乗数を λ_1, λ_2 とし、つぎの変分をとれば、系の基礎微分方程式が求められる。

$$\delta [T - U + W - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2] = 0 \quad (10)$$

ここで、未知関数は9個の変位と2個のLagrange 乗数 λ_1, λ_2 、計11個となるから、これに対して式(10)より求まる9個の微分方程式と式(8),(9)の2個の拘束条件式、すなわち計11個の方程式によって解くことができる。

鉛直たわみ振動については、 $\theta = v_o = v_r = v_l = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$ より、結局3個の方程式と1個の拘束条件によってつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{w_f}{g} \ddot{w}_o - \frac{w_f}{g A_f} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_y \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ (\lambda + 2\mu) I_y \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right\} + 4\bar{\lambda} (h + w_o - w) &= w_f \\ \frac{w_c}{g} \sqrt{1+h^2} \ddot{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E A_c \frac{h w' - u'}{(1+h^2)^2} \right\} - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h'(w+h' u')}{1+h^2} \right\} + 2\bar{\lambda} u &= 0 \\ \frac{w_c}{g} \sqrt{1+h^2} \ddot{w} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E A_c \frac{h(h' w' - u')}{(1+h^2)^2} \right\} + H_w h' - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{w' + h' w'}{1+h^2} \right\} - 2\bar{\lambda} (h + w_o - w) &= 2w_c \sqrt{1+h^2} \\ u^2 + (h + w_o - w)^2 &= h^2 \end{aligned}$$

上の4式は拘束条件であるが、実際 $\bar{\lambda}$ として $\bar{\lambda} = H_w h'' / 2h$ のように近似することができる。すなわち、 λ_1, λ_2 はハンガーに作用する拘束力を表わす。

3. おさひ

つり橋の自由振動に関する基礎方程式を誘導し、理論的にその性状を解析したが、その結果、振動 modes は鉛直たわみ型 modes と横れ型 modes の2つに分類される。横れ振動に際しては鉛直たわみ、橋軸直角方向の水平たわみが連成し、自由振動でもかなり複雑なものとなる。この研究はつり橋の動的性状解析の一環として行われたものであるが、くわしくは当日説明し、また数値計算結果もその際発表する。最後に われわれは京都大学小西教授に負うところ大であらう。記して感謝の意を表する。

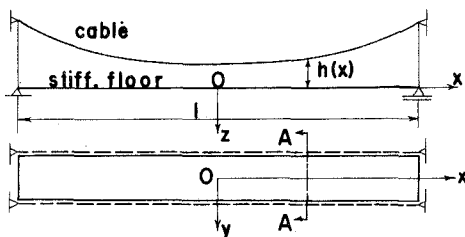


Fig.1

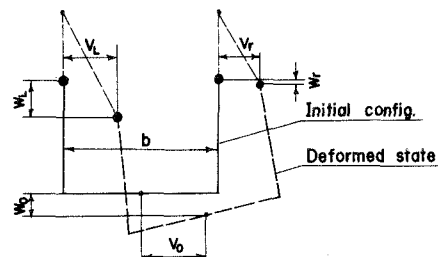


Fig.2 Section A-A