Ⅰ－77　仮想質量と水中における柱の振動(Ⅲ)

電力中央研究所 構造研究室 正員　桜井 彰雄

1] 水中における柱の強制振動と近似解

文献1)によれば，水中における柱の振動方程式は[27]式より（以後，文献1)の式を[3]のように引用する），

$$EI\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+[\rho A+m(x;f)]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta_0\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}=0 \qquad (1)$$

ただし　$m(x;f)=\frac{1}{f(x)}\cdot\rho_0\pi a^2\sum_i K^{(i)}\left(\frac{a}{l}\right)S_i(f)\cos\lambda_i\frac{x}{l}$

支点変位として強制力が与えられる場合，(1)式の第一項，第三項に含まれる y は支点に相対的なたわみ $f(x)T(t)$，第二項の y は固定座標に対するたわみ $X(x)T(t)=\{C_0+f(x)\}T(t)$ でなければならない。しかし，$d^4f/dx^4=d^4\{f(x)+C_0\}/dx^4=d^4X(x)/dx^4$ であるから，(1)式の y を $X(x)\cdot T(t)$ と解すれば支点変位として強制力が与えられる場合も式の形は変らない。例えば，片持ばり固定端が $y_0=C_0\sin pt$ で動く場合，解を $y(x,t)=X(x)\cdot e^{ipt}$ の形に仮定して(1)に代入すれば，

$$[EI+i\eta_0 p]\frac{d^4X(x)}{dx^4}-p^2\rho A\left[1+\frac{m(x,X)}{\rho A}\right]X(x)=0 \qquad (2)$$

を得るが，[30a]式と比べると，

$$\left(\frac{m}{l}\right)^4=\frac{\rho A p^2}{EI+i\eta_0 p} \qquad (3)$$

とおけば解はすでに求められており，[34]式で示される。(1)式は線型な微積分方程式であるから，求める解は以上の形式的な解のうち境界条件 $y_0=C_0\sin pt$ に応じて $y=X(x)e^{ipt}$ の虚部を採ればよい。

以上の厳密解を個々の境界条件につき一般的に表し，各パラメーター間の関係を調らべることは $\eta_0=0$ の場合を除き式が複雑になり困難であるので以下に近似的な方法で問題を扱ってみる。

強制変位を $y_0=C_0e^{ipt}$ とおき，(1)式を支点に相対的な座標で表し，解を $y=f(x)e^{ipt}$ と仮定すれば，柱のたわみ $f(x)$ の満足すべき式として(4)式を得る。

$$[EI+i\eta_0 p]\frac{d^4f}{dx^4}-p^2\rho A\left[1+\frac{m(x,f)}{\rho A}\right]f(x)=C_0p^2\rho A\left[1+\frac{\rho_0\pi a^2}{\rho A}\sum\frac{(-1)^i}{\lambda_i}K^{(i)}\left(\frac{a}{l}\right)\cos\lambda_i\frac{x}{l}\right]\equiv g(x) \qquad (4)$$

問題の固有関数を $\psi_n(x)$ とし，$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ，$f(x)=\sum f_n\psi_n$，$g(x)=\sum g_n\psi_n$ と展開できたとして(4)式に代入すれば，

$$[EI+i\eta_0 p]\sum f_n\psi_n^{(4)}-p^2\rho A\left[1+\frac{m(x,f)}{\rho A}\right]\sum f_n\psi_n=\sum g_n\psi_n \qquad (5)$$

しかるに，$S_i(f)=\int_0^1 f(s)\cos\lambda_i s\,ds=\sum_n f_n\int_0^1\psi_n\cos\lambda_i s\,ds=\sum_n f_n S_i(\psi_n)$ $\qquad (6)$

であるから，$m(x,f)=\sum f_n\psi_n m(x,\psi_n)$ $\qquad (7)$

したがって，(5)式の第 n 項を比べれば，

$$\left[EI + i\eta_0 p\right] f_n \psi_n^{(4)} - \rho A p^2 \left[1 + \frac{m(x, \psi_n)}{\rho A}\right] f_n \psi_n = g_n \psi_n \tag{8}$$

[34] 式から得られる固有関数には直交関係がないので，ψ_n として空中における柱の固有関数を採ると ψ_n には次の関係がある。

$$EI\psi_n^{(4)} - \rho A p_{on}^2 \psi_n = 0 \quad , \quad \int_0^l \psi_m \psi_n dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ M_n & (m = n) \end{cases} \tag{9}$$

（p_{on}：空中における固有円振動数）

(9)式を(8)式に代入し，両辺に ψ_n をかけて 0 から l まで積分すれば，

$$\left[1 + i\frac{\eta_0 p}{EI}\right] \rho A p_{on}^2 f_n M_n - \rho A p^2 \left[M_n + \frac{1}{\rho A}\int_0^h m(x, \psi_n)\psi_n^2 dx\right] f_n = g_n M_n$$

$$\therefore f_n = g_n \Big/ \rho A p_{on}^2 \left[1 - \frac{p^2}{p_{on}^2}\left(1 + \frac{1}{\rho A M_n}\int_0^h m(x, \psi_n)\psi_n^2 dx\right) + i\frac{\eta_0 p}{EI}\right] \tag{10}$$

しかるに [24] 式によれば，(10) 式の分母の一部は次の関係を用いて書直すことができる.

$$\frac{1}{p_{on}^2}\left(1 + \frac{1}{\rho A M_n}\int_0^h m(x, \psi_n)\psi_n^2 dx\right) = \frac{1}{p_{on}^2}\left[1 + \frac{\rho_0 \pi a^2 h \sum K(\frac{a}{h})\left\{\int_0^1 \psi_n(h\zeta)\cos\lambda_i\zeta d\zeta\right\}^2}{\rho A l \int_0^1 \psi_n^2(l\zeta) d\zeta}\right] = \frac{1}{p_n^2} \tag{11}$$

こゝに p_n は水中における柱の固有円振動数の近似値である。

形式的な解は $y = \sum f_n \psi_n \cdot e^{ipt}$ で与えられるが，強制変位 $y_0 = C_0 \cdot \sin pt$ に対する解はその虚部を採ればよい。[29] 式より減衰定数 g/n を h_0 と書けば $2h_0 = \eta_0 p/EI$ であるから，

結局，

$$y(x,t) = \sum \frac{g_n}{\rho A p_{on}^2} \cdot \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{p_n^2}\right)^2 + 4h_0^2}} \cdot \sin(pt - \theta_0) \tag{12}$$

ただし，

$$\tan\theta_0 = \frac{2h_0}{1 - p^2/p_n^2} \tag{13}$$

となって空中における柱の振動と類似の関係がみられる。

2] 表面波によるエネルギー減衰

振動振巾を問題にする場合系の減衰が問題になるが，水の減衰作用のうち表面波によるものは簡単に計算でき，柱の等価減衰定数 h_0 の形で表わすと次のようになる。

$$h_0 = \frac{p}{n} \cdot m^4 \cdot \frac{\rho_0 \pi a^2}{\rho A} \cdot \frac{h}{l} \cdot K_0\left(\frac{a}{h}\right) \cdot \frac{\left\{\int_0^1 f(h\zeta)\cosh\lambda_0\zeta d\zeta\right\}^2}{\int_0^1 \left(\frac{d^2 f(l\eta)}{d\eta^2}\right)^2 d\eta} \tag{14}$$

ただし，

$$K_0\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{-2}{a/h} \cdot \frac{2}{(\lambda_0 + \cosh\lambda_0 \sinh\lambda_0)} \cdot \frac{J_1' Y_1 - J_1 Y_1'}{J_1'(\lambda_0\frac{a}{h}) + Y_1(\lambda_0\frac{a}{h})}$$

，λ_0 は $\tanh\lambda_0 = \frac{p^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0}$ の根

参考文献

1) 桜井彰雄 [水中に立てられた柱状構造物の振動] 土木技術 16巻6号 1961.6

2) 〃 〃 [水中構造物の振動] 電研 第二部講演と懇談の会前刷 1962.11

3) R.W. Clough [Effects of Earthquakes on Under-Water Structures] proc. 2nd. World Conf. on Earthqu Eng. Vol. II. 1960