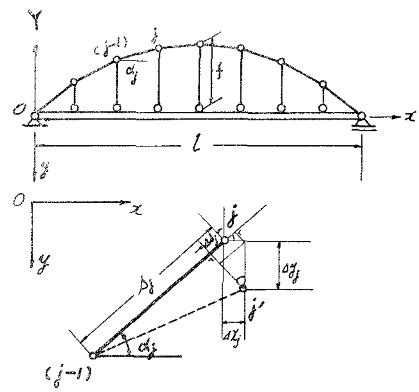
I－74　移動荷重をうけるランガー桁橋の動的研究（その1）

——エネルギー法による固有振動数と振動モード——

熊本大学　正員　吉村虎蔵
熊本大学　正員　平井一男
京都大学　正員　○平島健一

ランガー橋の動的研究として，従来いくつかの研究が数えられるけれども，それらはいずれもランガー桁橋の固有周期の理論とその実験値との比較の域を脱しなかった。筆者等は，固有周期と振動モード決定の新な2法をこゝに発表し，この理論による固有周期と実験値とを比較し，さらに動的レスポンスの特殊な場合として得た静的レスポンスを，通常ランガー桁橋の設計に用いる仮想仕事法より得た撓みや曲げモーメントの影響線と比較して，2つの理論の正しいことおよび，ランガー桁橋の動的レスポンスの性状等について，同一課題（その1），（その2），（その3）に発表したい。



この一連の課題において扱うランガー桁橋においては，次の条件を仮定する。

(1)　アーチ軸線は放物線である。

(2)　補剛桁は定断面桁に換算して扱う。

(3)　アーチ断面も同様，定断面に換算して扱う。

(4)　吊材の伸びを無視する。

(5)　支承上において，補剛桁図心線とアーチ軸線との間に偏心がない。

ランガー桁橋のアーチは折線の滑節アーチであるから，いまアーチの一部材$(j-1)\sim(j)$が軸力をうけてその材長s_jがΔs_jだけちぢみ，(j)点が$(j-1)$点に対して，図に示すようにΔx_j，Δy_jだけ変位したとすると，次の関係が成立する。

$$\Delta s_j = \Delta y_j \sin\alpha_j - \Delta x_j \cos\alpha_j \quad \text{------------} \quad (1.1)$$

上の式は図の如き簡単な幾何学的関係から知ることができるし，また三平方の定理から求めることもできる。式(1.1)を変形して次式を得る。

$$\Delta x_j = \Delta y_j \tan\alpha_j - \Delta s_j \sec\alpha_j \quad \text{------------} \quad (1.2)$$

この式の右辺第2項はCastiglianoの定理から求めることもできる。アーチが軸力をうけて変形した場合，free bodyとしたアーチの支間の水平伸び量は，上のΔx_jの総和として得られる。すなわち

$$\text{アーチの水平伸び} = \sum_{j=1}^{k} \Delta x_j \quad \text{------------} \quad (1.3)$$

ここにkは格間数，一方補剛桁の軸力による伸びをΔlとすると，

$$\Delta l = \Delta H \cdot l / A_g E \quad \text{------------} \quad (1.4)$$

たゞし，ΔH は振動の極限位置におけるアーチの水平推力の増加量，ℓ は支间，A_g は補剛桁断面積，E はヤング率。式 (1.3) と式 (1.4) は等しかるべきであるから次式の適合条件が成立する。

$$\Delta H\cdot \ell / A_g\cdot E = \sum_{j=1}^{k} \Delta y_j \tan\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} \Delta S_j \sec\alpha_j \quad \text{-----} \quad (1.5)$$

さて，図のアーチの軸線が $Y = 4f x(\ell - x)/\ell^2$ なるアーチとすると，$\tan\alpha_j = 4f(\ell - 2x)/\ell^2$。
また自由振動の或る次数のモードを次のごとく考える

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{-----} \quad (1.6)$$

ゆえに，$d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$。従ってこの振動モードの自由振動時には式 (1.5) の右辺第 1 項は次の 2 つの形となる。

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \Delta y_j \tan\alpha_j &= \int_0^{\ell} \tan\alpha_j\, d\varphi \\ &= 16\left(\frac{f}{\ell}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\pi} && n = 1.3.5\cdots \text{のとき} \\ &= 0 && n = 2.4.6\cdots \text{のとき} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----} \quad (1.7)$$

(1.5) 式の右辺第 2 項は

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta S_j \sec\alpha_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta H\cdot \sec^2\alpha_j}{A_a\cdot E}\cdot S_j = \frac{\Delta H}{A_a\cdot E}\int_0^{\ell}\sec^3\alpha_j\, dx \fallingdotseq \frac{\Delta H\cdot \ell}{A_a\cdot E}\left\{1 + 8\left(\frac{f}{\ell}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{\ell}\right)^4\right\} \quad \text{--} \quad (1.8)$$

ここに A_a はアーチの断面積である。故に式 (1.5) の適合条件から，ΔH と振動変位との関係，すなわち次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &n = 1, 3, 5\cdots \text{のとき} && \Delta H = \frac{16\left(\frac{f}{\ell}\right)\cdot E}{\pi\cdot \ell}\,\frac{A_a\cdot A_g}{A_a + A_g\left\{1 + 8\left(\frac{f}{\ell}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{\ell}\right)^4\right\}}\sum\frac{a_n}{n} \\ &n = 2.4.6\cdots \text{のとき} && \Delta H = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{-----} \quad (1.9)$$

ここではまず，エネルギー法によって固有周期，振動モードを求めることについて簡単に述べる。アーチの Potential Energy の最大値を V_a，補剛桁によるそれを V_g，補剛桁の曲げによるそれを V_{gM} とすると

$$\left.\begin{aligned} V_a &= \sum_{j=1}^{k}\frac{(\Delta H\cdot \sec\alpha_j)^2}{2A_a\cdot E}S_j = \frac{\Delta H^2}{2A_a E}\int_0^{\ell}\sec^3\alpha_j\, dx \fallingdotseq \frac{\Delta H^2 \ell}{2A_a E}\left\{1 + 8\left(\frac{f}{\ell}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{\ell}\right)^4\right\} \\ V_g &= \Delta H^2 \ell / 2A_g\cdot E \\ V_{g\cdot M} &= \int_0^{\ell}\frac{M^2}{2EI_g}dx = \frac{E\pi^4}{4\ell^3}I_g\sum_{n=1}^{\infty} n^4\cdot a_n^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \quad (1.10)$$

これらの総計 ΣV は，(1.10) に (1.9) を入れると対称振動時には

$$\Sigma V = V_a + V_g + V_{g\cdot M} = \frac{128\,E\left(\frac{f}{\ell}\right)^2}{\pi^2\cdot \ell}\cdot B\cdot\left(\Sigma\frac{a_n}{n}\right)^2 + \frac{E\pi^4}{4\ell^3}I_g\,\Sigma\, n^4\cdot a_n^2 \quad \text{----} \quad (1.11)$$

たゞし，$B = A_a\cdot A_g / [A_a + A_g\{1 + 8(\frac{f}{\ell})^2 + 19.2(\frac{f}{\ell})^4\}]$。逆対称振動時には (1.11) 式の右辺第 1 項が落ちる。

一方，ランガー橋が $y = \varphi(x)\sin(\omega t + \alpha)$ なる自由振動をすると考えると，このときの運動エネルギーの最大値 T は次のごとくなる

$$T = \left\{\int_0^{\ell}\frac{1}{2}(\rho\, dx)\cdot \dot{y}^2\right\}_{max} = \frac{1}{4}\rho\,\ell\,\omega^2\,\Sigma\, a_n^2 \quad \text{-----} \quad (1.12)$$

ここに ρ は単位長質量，ω は固有振動数。Ritz の法によって固有周期を決定するために ΣV と T との差を最小にする条件，すなわち $\frac{\partial}{\partial a_n}(\Sigma V - T) = 0$ を入れ，対称振動に対して次の式を得る。

$$\frac{256E\left(\frac{f}{\ell}\right)^2}{\pi^2\cdot \ell}\cdot B\cdot\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} + \frac{E\pi^4}{2\ell^3}I_g\cdot n^4\cdot a_n - \frac{1}{2}\rho\,\ell\,\omega^2 a_n = 0 \quad \text{-----} \quad (1.13)$$

逆対称振動時には

$$\frac{\partial}{\partial a_n}(\Sigma V - T) = \frac{E\pi^4}{2\ell^3}I_g\cdot n^4\cdot a_n - \frac{1}{2}\rho\,\ell\,\omega^2 a_n = 0 \quad \text{-----} \quad (1.14)$$

正規化の条件によって，正規化した振動モード Φ_m を求め，式 (1.13) と (1.14) より ω_m を求めれば，(その 3) によって，動的静的レスポンスが得られることになる。