I－73　弾性体の非線型振動の近似解法

九州大学工学部　正員　小坪清真

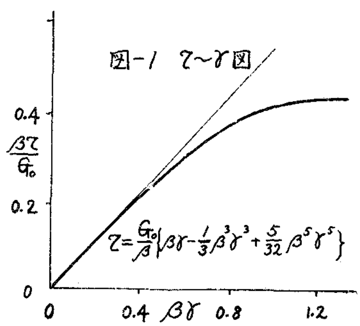
1. 緒言

構造物の耐震設計法を確立するには，構造物の地震に対する応答を明らかにすることが重要である。この場合構造物の変形が微小であれば，線型的取扱で十分であるが，変形が大きく，構造物の破壊に対する安全性が問題にされるような場合には，構造物の変形はもはや線型的でなくなり，非線型振動として取り扱わなければならない。しかしながら，土木構造物においては連続体は勿論，質点系でさえもまだ非線型振動として取り扱われることが少いようである。これは土木構造物の復元力特性及び減衰常数などの基礎的資料の不備にもよるが，さらに，その解析が面倒で電子計算機による数値解析に頼らねばならないことによるものと思われる。この研究は梁その他の連続構造物の非線型振動を電子計算機による複雑な計算によらず，従来の *modal analysis* を使用するに際し，その復元力特性(固有振動数の振巾による変化)等を考慮することによって，構造物の非線型応答を近似的に求めることの可否についての研究のうち，固有振動数の近似計算法の一部を示したものである。

2. 振動の微分方程式

一例として一端固定他端自由のせん断振動を考える。応力－歪関係は一般には履歴特性を持つが，今回は図－1に示すようにヒステリシスのない場合について考察する。変位をu，座標をx，時間をt，単位体積重量をw，せん断弾性係数をG，重力加速度をgとすれば，微分方程式は

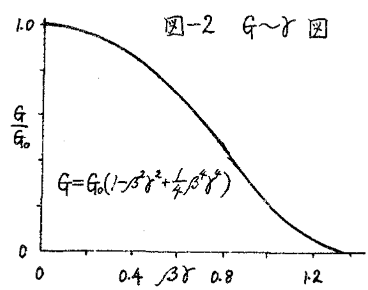
$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$



Gは静歪δ及び動歪γの函数であるが，静歪のない場合をとり，$G=G_0(1-\beta^2\gamma^2+b\beta^4\gamma^4)$とおけるものとする。$\beta$，$b$は材料の種類及び振動速度によって変る定数である。ここでは$b=1/4$とした。$u=l\xi$，$x=l\eta$，さらに，$\beta\xi=\phi$とおけば，微分方程式は無次元量ϕ及びηを用いて次のようになる。

$$a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\left\{1-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^4\right\}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=0 \quad\text{-----------}(1)$$

ここに，$a^2=wl^2/gG_0$，lはせん断長さである。



3. 固有振動数の近似計算法

(i) 差分法による厳密解

(1)式を時間Δt，距離$l\Delta\eta$間隔の差分方程式に変換し，初速を0とし，各点が同時に中立位置を通過する

ような初期変位 $\phi(0,\eta)$ を定め得れば，この $\phi(0,\eta)$ をこの振巾における振動型と呼ぶことにし，中立位置を通過するまでの時間から固有振動数を求めることができる。

(ii)時間函数を $\sin\omega t$ と仮定する法

各点の位相差を無視し，かつ，単弦振動と仮定して，$\phi=\Phi(\eta)\sin\omega t$ で表わされるものとして(1)式に代入し，$\sin\omega t$ の係数を比較して時間函数を分離し，$\lambda^2=a^2\omega^2$ とおいて，

$$\left\{1-\frac{3}{4}\left(\frac{d\Phi}{d\eta}\right)^2+\frac{5}{32}\left(\frac{d\Phi}{d\eta}\right)^4\right\}\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}+\lambda^2\Phi=0 \quad \text{----------}(2)$$

これを境界条件($\eta=0$ で $d\Phi/d\eta=0$ 及び $\Phi=\Phi_0$ 及び $\eta=1$ で $\Phi=0$)によって解けば，Φ_0 自由端振巾 と λ との関係が得られる。

(iii)振動型に線型微分方程式の固有函数を使用し，時間函数を求める法

線型方程式の固有函数を用いて，$\phi=\Phi_0\cos\frac{\pi}{2}\eta\cdot f(t)$ とおき，(1)式に代入して η を分離し $f(t)$ のみの方程式とすれば，

$$a^2\frac{d^2f(t)}{dt^2}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2f(t)-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\Phi_0^2f(t)^3+\frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\Phi_0^4f(t)^5=0 \quad \text{--------}(3)$$

差分法又は摂動法によって週期 T を求めれば，$\lambda=a\omega=a\cdot 2\pi/T$ として，振巾 Φ_0 と λ との関係が求められる。

(iv)線型週期解をそのまゝ使用する法

最も簡単に，振動型も時間函数も線型方程式の解をそのまゝ用いて，$\phi=\Phi_0\cos\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin\omega t$ とおいて(1)式に代入し，$\cos\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin\omega t$ を分離して Φ_0 と λ との関係を求めると次式となる。

$$\lambda^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left\{1-0.462\Phi_0^2+0.118\Phi_0^4\right\} \quad \text{----------}(4)$$

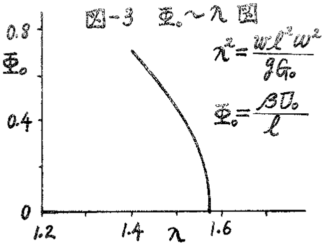
表－1　λの値

Φ_0	(i)の法	(ii)の法	(iii)の法	(iv)の法
0	1.571	1.571	1.571	1.571
0.1		1.564		1.565
0.2		1.555	1.560	1.555
0.3		1.540		1.536
0.4	1.505	1.518	1.533	1.510
0.5		1.486		1.480
0.6		1.450	1.448	1.445
0.7	1.390	1.410	1.410	1.402

4. 計算結果

表－1はこれら(i)〜(iv)の方法によつて求められたλと Φ_0 との関係を示す。これより，固有振動数の変化は(iv)のような簡単な方法によつても十分な精度を以つて求められることが判る。図－3は(iv)による Φ_0 とλとの関係を示し，図－4は(ii)で得られたΦの形を示したもので，変位が大きくなるとΦの形が変ることが判る。

図－3　Φ_0〜λ図



5. 結語

連続構造物の地震応答に影響を及ぼすものは振動型の変化よりも，復元力特性の変化にあると思われるから，電子計算機により非線型偏微分方程式を直接解くよりも，振動型の多少の変化及び位相差を無視して，振巾による復元力特性の変化を求め，

1質点系の振動とみなして応答を計算すれば，この種の問題の近似解が容易に得られるのではないかと考える。応力－歪関係に履歴特性がある場合及び強制振動については後日にゆづる。

図－4　振動型