I－41 偏心集中荷重をうける単純支持円板の解について

東京大学生産技術研究所　　正員　　佐武正雄

偏心した集中荷重をうける円板の解は，固定支持の場合容易に解かれているが，単純支持の場合は可なり複雑である．本文はこの場合の解について考察する．

円板の半径を a，剛度を D とし，荷重点の偏心距離を d，$\alpha = \log \dfrac{d}{a}$ とおく．$p(z) = \log \dfrac{c+z}{c-z}$ $\left(c = \dfrac{a^2-d^2}{2d} \right)$ の実数部，虚数部

$$p_1 = \tanh^{-1} \frac{2cx}{x^2+y^2+c^2}, \qquad p_2 = \tan^{-1} \frac{-2cy}{x^2+y^2-c^2}$$

を基函数とする曲線座標（双極座標）は図1に示すような円群からなり，丁度問題に適応した曲線座標を与える．円板の周辺は $p_1 = \alpha$，荷重点は $p_1 = -\infty$ に対応している．この座標に関する断面モーメント，シヤの成分は撓みを w とすれば

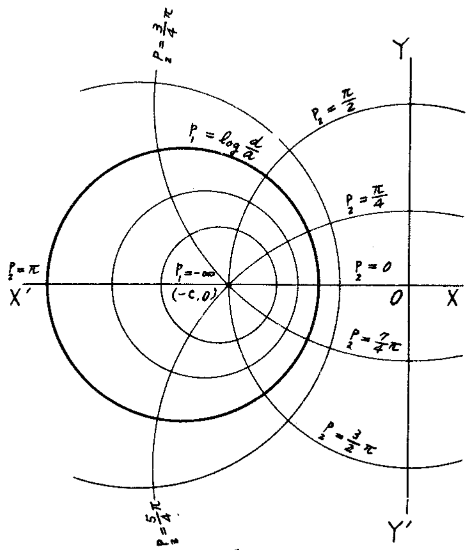

図 1

$$\left.\begin{aligned}
M_{(11)} &= -D\left[\frac{1+\nu}{2}\Delta w + \frac{1-\nu}{2}|p'|\{(\partial_{11}-\partial_{22})(|p'|w) - |p'|w\}\right] \\
M_{(22)} &= -D\left[\frac{1+\nu}{2}\Delta w - \frac{1-\nu}{2}|p'|\{(\partial_{11}-\partial_{22})(|p'|w) - |p'|w\}\right] \\
M_{(12)} &= -D(1-\nu)|p'|\,\partial_{12}(|p'|w)
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_{(1)} &= -D|p'|\,\partial_1 \Delta w \\
Q_{(2)} &= -D|p'|\,\partial_2 \Delta w
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる．こゝに，$|p'| = \dfrac{1}{c}(\cosh p_1 + \cos p_2)$，$\Delta = |p'|^2(\partial_{11} + \partial_{22})$ である．また，換算シヤは

$$V_{(1)} = Q_{(1)} + |p'|\,\partial_2 M_{(12)} \quad \cdots\cdots (3)$$

とかける．

双極座標における $\Delta^2 w = 0$ ……(4) の一般解は

$$w = \frac{1}{|p'|} f_n(p_1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, n p_2$$

とおくことができる．こゝに，$f_n(p_1)$ は　$f_n'''' - 2(n^2+1) f_n'' + (n^2-1)^2 f_n = 0$　を満足しなければならない．従って

$$\left.\begin{aligned}
n = 0 &: \quad f_0 = (A_0 p_1 + B_0)\, e^{p_1} + (C_0 p_1 + D_0)\, e^{-p_1} \\
n = 1 &: \quad f_1 = A_1 e^{2p_1} + B_1 e^{-2p_1} + C_1 p_1 + D_1 \\
n \geq 2 &: \quad f_n = A_n e^{(n+1)p_1} + B_n e^{-(n+1)p_1} + C_n e^{(n-1)p_1} + D_n e^{-(n-1)p_1}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

となり，(4) の一般解は

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{w}_n, \qquad w_n = \frac{1}{|p'|} f_n(p_1) \cos n p_2, \quad \overline{w}_n = \frac{1}{|p'|} \overline{f}_n(p_1) \sin n p_2 \quad \cdots\cdots (6)$$

とかくことができる．われわれの問題においては撓みの対称性から $\overline{w}_n$ は用いない．また，荷重点の撓みが有限確定であることから　$C_0=0$，$B_1=0$，$B_n=D_n=0$　$(n\geqq 2)$ ……(7) を得る．従って，解として w_0 から w_n までの項の和を用いれば，未知定数の数は 3，6，8，… $2n+4$ となる．w_n による断面モーメント等は次のようにかける．

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{(11)} &= -\frac{D}{c}\Big[\frac{1}{2}\{f_n''+(n-1)(1-n\nu)f_n\}\cos(n+1)\rho_2+\{f_n''\cosh\rho_1-(1+\nu)f_n'\sinh\rho_1-\nu(n^2-1)f_n\cosh\rho_1\}\cos n\rho_2 \\
&\qquad +\frac{1}{2}\{f_n''-(n+1)(1+n\nu)f_n\}\cos(n-1)\rho_2\Big] \\
M_{(22)} &= -\frac{D}{c}\Big[\frac{1}{2}\{\nu f_n''-(n-1)(n-\nu)f_n\}\cos(n+1)\rho_2+\{\nu f_n''\cosh\rho_1-(1+\nu)f_n'\sinh\rho_1-(n^2-1)f_n\cosh\rho_1\}\cos n\rho_2 \\
&\qquad +\frac{1}{2}\{\nu f_n''-(n+1)(n+\nu)f_n\}\cos(n-1)\rho_2\Big] \\
M_{(12)} &= D(1-\nu)nf_n'|P'|\sin n\rho_2 \\
Q_{(1)} &= -\frac{D}{c}|P'|\Big[\frac{1}{2}\{f_n'''-(n-1)^2f_n'\}\cos(n+1)\rho_2+\{f_n'''\cosh\rho_1-f_n''\sinh\rho_1-(n^2+1)f_n'\cosh\rho_1-(n^2-1)f_n\sinh\rho_1\}\cos n\rho_2+\frac{1}{2}\{f_n'''-(n+1)^2f_n'\}\cos(n-1)\rho_2\Big] \\
Q_{(2)} &= \frac{D}{c}|P'|\Big[\frac{1}{2}\{f_n''-(n-1)^2f_n\}(n+1)\sin(n+1)\rho_2+\{f_n''\cosh\rho_1-2f_n'\sinh\rho_1-(n^2-1)f_n\cosh\rho_1\}n\sin n\rho_2+\frac{1}{2}\{f_n''-(n+1)^2f_n\}(n-1)\sin(n-1)\rho_2\Big] \\
V_{(1)} &= -\frac{D}{c}|P'|\Big[\frac{1}{2}\{\!\{f_n'''-\{(2n^2-n+1)-n(n+1)\nu\}f_n'\}\!\}\cos(n+1)\rho_2+\{\!\{f_n'''\cosh\rho_1-f_n''\sinh\rho_1-\{(2n^2+1)-n^2\nu\}f_n'\cosh\rho_1-(n^2-1)f_n\sinh\rho_1\}\!\}\cos n\rho_2 \\
&\qquad +\frac{1}{2}\{\!\{f_n'''-\{(2n^2+n+1)-n(n-1)\nu\}f_n'\}\!\}\cos(n-1)\rho_2\Big]
\end{aligned}
\right\}
\qquad \cdots\cdots (8)
$$

単純支持の場合の境界條件を固定支持の場合にならい $\rho_1=\alpha$ において

$$w=0 \;\cdots\; (9) \qquad M_{(11)}=0 \;\cdots\; (10) \qquad -P=\oint V_{(1)}\,ds=\oint\frac{1}{|P'|}V_{(1)}\,d\rho_2 \;\cdots\cdots\; (11)$$

の3個としてみる．（Pは集中荷重）　この場合，解として　$w=w_0+w_1$　をとれば十分である．何となれば，未知定数の数は6個で，方程式の数も (9),(10)式の $\cos i\rho_2$ の係数を0とおくことによって得られる5個と (11) 式の計6個となるからである．この場合の解は

$$f_0=\frac{cP}{4\pi D\gamma}\{\beta\sinh(\alpha-\rho_1)+2(1+\nu)\sinh\alpha\, e^{\rho_1-\alpha}(\alpha-\rho_1)\},\qquad f_1=\frac{cP}{\pi D\gamma}(\alpha-\rho_1)$$

たゞし，$\beta=\dfrac{(3+\nu)a^2+(1-\nu)d^2}{ad}$，$\gamma=\dfrac{(1+\nu)a^2+(3-\nu)d^2}{d^2}$　となる．しかし，周辺における反力を計算してみるとモーメントの釣合い條件が成立していないことが分る．不釣合いモーメントの大きさは　$M=\dfrac{2d(a^2-d^2)}{(1+\nu)a^2+(3-\nu)d^2}P$ で，これは荷重点に作用していると考える．$d\fallingdotseq 0$，または $d\fallingdotseq a$ の場合にはMは小となり，上記の解を近似解として用いることができる．

モーメントの釣合い條件は $\rho_1=\alpha$ において　$-Pa=\oint\dfrac{1}{|P'|^2}V_{(1)}\,d\rho_2$ ……(12)　でこれを境界條件に加えなければならない．解として　$w=\sum w_i$　の第 n 項までとるとすれば，方程式の数は $(2n+5)$ 個となり，未知数の数は $(2n+4)$ 個であるから有限の項数では解は求められず無限級数となる．無限級数解を求めるには差分方程式を応用することになるが，実用的には最初の数項までとって解を近似的に求めることもできる．この際は (10) 式の $\cos i\rho_2$ の係数の中 $\cos(n+1)\rho_2$ のものだけ0とおかない．従って周辺には

$$M_{(11)}=-\frac{D}{2c}f_n''(\alpha)\cos(n+1)\rho_2$$

という残留モーメントが存在することになるが，項数 n を大きくとることによりこの残留モーメントの値を小さくすることができる．