

I-37 剛度の変化する平板理論の応用について

北大工学部 正員 茅 村 仁

[I] 概説 平板理論を応用してリブ付板や格子桁などの解析が行われている。しかし従来は形が矩形状のものについての応用であったのでその基礎となる理論は「等剛度平板」のものすなわち等厚＝等剛度の理論の範囲内で応用可能の場合であるが、この矛を例えれば円板で放射方向と円周方向に補強されたリブ付円板とみ、それぞれの方に鉄筋を配置した鉄筋コンクリートスラブとみまた曲線格子桁のように円弧方向の鉄筋の主桁とそれに直交する鉄筋の横桁から格子をつくっているものでは、放射方向にその間隔が振つて居り一定ではない。これらの補強材の剛度を平板の剛度におきかえて解くことを考えると結局「変剛度が放射方向に変化する平板理論」を用いなければならぬ。この点に着目しその理論をたゞその応用について述べた。

[II] 基礎式

(1) カッつりあいの式

$$p = -\frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial M_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta r}}{\partial \theta \partial r} \quad (1)$$

(2) 補強材の剛度 → 平板の剛度への置換え ($p \leq 1$)

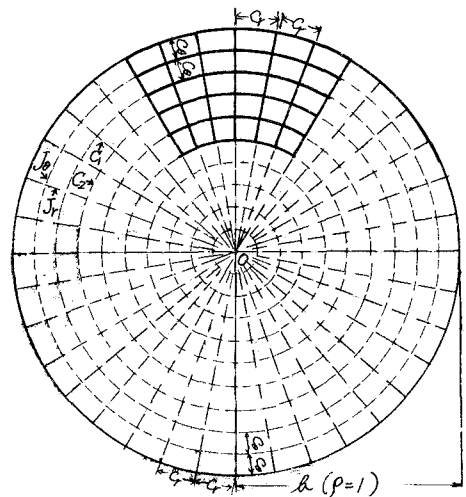
$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{E J_r}{G \rho} \\ N_{\theta} &= \frac{E J_{\theta}}{C_0} \\ C_1 &= \frac{C_1}{G \rho} \\ C_2 &= \frac{C_2}{C_0} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(3) 断面モーメント, J_r, J_{θ} = 曲げ剛度, C_1, C_2 = 換り剛度

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{E J_r}{G \rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}, & M_{\theta} &= -\frac{E J_{\theta}}{C_0 \rho^2} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -\frac{C_1}{G \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], & M_{\theta r} &= -\frac{C_2}{C_0 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(4) 基礎微分方程式¹⁾ ($J_r, J_{\theta}, C_1, C_2$ がすべて ρ の関数で表わされる一般の場合)

$$\begin{aligned} & \frac{E J_r(\rho)}{G \rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \left[\frac{2E}{G \rho} \frac{d J_r(\rho)}{d \rho} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^3} + 2 \frac{C_2(\rho)}{C_0 \rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} + \\ & + \left[\frac{C_1(\rho)}{G \rho^2} - \frac{2C_2(\rho)}{C_0 \rho^2} + \frac{2}{C_0 \rho^2} \frac{d C_2(\rho)}{d \rho} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta^2} + \left[-\frac{C_1(\rho)}{G \rho^2} + \frac{3C_2(\rho)}{C_0 \rho^2} + \frac{2E J_{\theta}(\rho) \cdot E}{C_0 \rho^4} \frac{d J_{\theta}(\rho)}{d \rho} \right. \\ & - \frac{2}{C_0 \rho^3} \frac{d C_2(\rho)}{d \rho} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left[\frac{E J_{\theta}(\rho)}{C_0 \rho^3} - \frac{E}{C_0 \rho^2} \frac{d J_{\theta}(\rho)}{d \rho} \right] \frac{\partial w}{\partial \rho} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{E}{G} \frac{d J_r(\rho)}{d \rho^2} - \frac{E J_{\theta}(\rho)}{\rho^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \\ & - \frac{E J_{\theta}(\rho)}{C_0 \rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^4} = p(\rho, \theta) \cdot \rho^4 \quad (4) \end{aligned}$$



(なおこの(4)式はたとえば等厚等方性板の $\Delta\Delta w = \frac{p}{D}$ に相当するものである)

(5) 微分方程式の θ に関する有限Fourier sine変換($0 < \theta < \alpha$)

$$A \frac{d^4 u_s}{dp^4} + B \frac{d^3 u_s}{dp^3} + [-\beta^2 C - G] \frac{d^2 u_s}{dp^2} + [-\beta^2 D + F] \frac{du_s}{dp} + \beta^2 [H\beta^2 - E] u_s =$$

$$= S\{p(p, \theta)\} \cdot k^4 - \beta\{[C-H][w''(p, 0) - (-1)^n w''(p, \alpha)] + D[w'(p, 0) - (-1)^n w'(p, \alpha)] +$$

$$+ (E + H\beta^2)[w(p, 0) - (-1)^n w(p, \alpha)]\} \quad (5)$$

(6) 有限Fourier Cosine変換($0 < \theta < \alpha$)

$$A \frac{d^4 u_c}{dp^4} + B \frac{d^3 u_c}{dp^3} + [G - \beta^2 C] \frac{d^2 u_c}{dp^2} + [-\beta^2 D + F] \frac{du_c}{dp} + \beta^2 [H\beta^2 - E] u_c =$$

$$= C\{p(p, \theta)\} \cdot k^4 + (C+H)[w'''(p, 0) - (-1)^n w'''(p, \alpha)] + D[w''(p, 0) - (-1)^n w''(p, \alpha)] +$$

$$+ (E - H\beta^2)[w'(p, 0) - (-1)^n w'(p, \alpha)] \quad (6)$$

(8) 逆変換公式

$$w(p, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} w_s(p, \beta) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (7)$$

$$w(p, \theta) = \frac{1}{\alpha} w_c(p, 0) + \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} w_c(p, \beta) \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (8)$$

(9) 記号

	J_r, J_0, C_1, C_2 がすべて p の関数で表わされる一般の場合	$J_r, J_0 = \text{const.}, \frac{J_0}{J_r} = \varepsilon, \frac{C_1}{C_2} = k$ のとき $\left(\frac{EJ_r}{G\rho^4}\right)$ で割った値
A	$\frac{EJ_r(p)}{G\rho^4}$	1
B	$\frac{2E}{G\rho^4} \frac{dJ_r(p)}{dp}$	0
C	$\frac{2C_2(p)}{G\rho^2}$	$\frac{2kC_2}{EJ_r}$
D	$\frac{C_1(p)}{G\rho^4} - \frac{2C_2(p)}{G\rho^3} + \frac{2}{G\rho^2} \frac{dC_2(p)}{dp}$	$\frac{G - 3C_2 k \rho}{\rho^3}$
E	$-\frac{C_1(p)}{G\rho^6} + \frac{3C_2(p)}{G\rho^4} + \frac{2EJ_0(p)}{G\rho^4} \cdot \frac{E}{G\rho^3} \frac{dJ_0(p)}{dp} \cdot \frac{2}{G\rho^3} \frac{dC_2(p)}{dp}$	$\frac{1}{EJ_r} \left[\frac{(2EEJ_r + 3Gk\rho - C_1)}{\rho^4} \right]$
F	$\frac{EJ_0(p)}{G\rho^3} - \frac{E}{G\rho^2} \frac{dJ_0(p)}{dp}$	$\frac{\varepsilon k}{\rho^2}$
G	$\frac{1}{\rho} \frac{E}{C_2} \frac{dJ_r(p)}{dp^2} - \frac{EJ_0(p)}{\rho^2}$	$-\frac{\varepsilon k}{\rho}$
H	$\frac{EJ_0(p)}{G\rho^4}$	$\frac{\varepsilon k}{\rho^2}$

[III] 応用

(1) 補強された円板で非軸対称問題, および曲線格子桁のときは(4)(5)または(6)式が有効

(2) 補強された円板で軸対称のときは(4)式中の θ に関する項は0になり単微分方程式になる。

$$A \frac{d^4 w}{dp^4} + B \frac{d^3 w}{dp^3} + G \frac{d^2 w}{dp^2} + F \frac{dw}{dp} = p(p, \theta) \cdot k^4 \quad (9)$$

文献) 芳村に「曲線格子桁の板剛度が変化する平板理論」による解法」利国橋梁構造工学研究会論文集
橋梁構造に関する新しいアイデア, 1962, 10